

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỶ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA
LÀO CAI

NĂM HỌC 2023 – 2024

Vòng 2 – Môn thi: Toán

Ngày thi: 06/10/2023

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

(Đề thi gồm: 05 câu, 01 trang)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (x_n) có tất cả các số hạng lớn hơn 1 và thỏa mãn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\sqrt[n]{\ln x_n}) = \frac{1}{2024}. \text{ Dãy } (y_n) \text{ được xác định bởi } y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \dots + \sqrt{x_n}}}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy (y_n) hội tụ.

b) Xét dãy (z_n) xác định bởi $\begin{cases} z_1 = 1 \\ y_n = z_n \cdot y_{n-1} - 2023, \forall n \geq 2 \end{cases}$. Đặt $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_1 z_2 \dots z_k}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, biết rằng $x_1 = 4$.

Câu 2 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Đường tròn (O) đi qua hai điểm B, C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E . Giả sử DE cắt BC tại F , BE cắt CD tại I . Gọi M, N tương ứng là trung điểm của BE, CD và MN cắt AB, AC lần lượt tại P, Q .

a) Chứng minh rằng FA tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN và AI là đường đối trung của tam giác APQ .

b) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ tiếp xúc với đường tròn đường kính IO .

Câu 3 (4,0 điểm). Xét hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(xf(y)) + f(y^{2023}f(x)) = xy + xy^{2023}, \forall x, y > 0$$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ là đơn ánh.

b) Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 4 (3,0 điểm). Xét các số nguyên dương $m > n > 1$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) mọi ước nguyên tố của n đều là ước của m ;

ii) m không chia hết cho n ;

iii) $m + n$ nguyên tố cùng nhau với 210.

a) Chứng minh rằng mọi ước nguyên tố của n đều không nhỏ hơn 11 và m là số chẵn.

b) Giả sử tất cả các ước nguyên tố của m đều không vượt quá 13 và $m + n \leq 2023$. Tìm tất cả các giá trị của n .

Câu 5 (3,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , ta định nghĩa điểm H là điểm nguyên nếu nó có hoành độ và tung độ là các số nguyên. Hai điểm nguyên A, B được gọi là “liên kết” với nhau nếu A, B đồng thời khác điểm O và thỏa mãn $-1 \leq \overline{OA} \cdot \overline{OB} \leq 1$ với O là gốc tọa độ.

a) Tìm tất cả các điểm nguyên $M(x, y)$ với $-2 \leq x \leq 6, -2 \leq y \leq 6$ thỏa mãn điểm M và điểm $N(3; 4)$ “liên kết” với nhau.

b) Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu điểm nguyên không nằm trên các trục tọa độ Ox, Oy đôi một “liên kết” với nhau.