

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Họ và tên, chữ ký: Giám thị thứ nhất:.....

Giám thị thứ hai:.....

Câu 1 (5,0 điểm)

1. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 4m - m^2 = 0$ (1) (x là ẩn, m là tham số).

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt.

b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = |x_1 - x_2|$$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2021 - y} = \sqrt{4042} \\ \sqrt{2021 - x} + \sqrt{y} = \sqrt{4042} \end{cases}$$

Câu 2 (5,0 điểm)

1. Cho đa thức $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f(0) > 0$

a) Chứng minh phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = x$.

2. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $xy = 1$. Chứng minh $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{x+y} \geq 3$

Câu 3 (7,0 điểm) Cho đường tròn tâm O bán kính R. Dây cung BC cố định, không đi qua tâm O. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O) (M và N là các tiếp điểm). Gọi I, H lần lượt là trung điểm của BC và MN, BC cắt MN tại K.

1. Chứng minh bốn điểm O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và HK là tia phân giác của $\widehat{BHC}$

2. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở E. Chứng minh M, N, E thẳng hàng.

3. Đường thẳng Δ qua điểm M và vuông góc với đường thẳng ON, cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để tứ giác AMPN là hình bình hành.

Câu 4 (3,0 điểm)

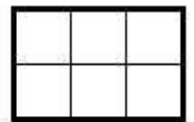
1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 - 5x + 7 = 3^y$

2. Cho một bảng ô vuông $m \times n$ (gồm m dòng và n cột). Cho quy tắc tô màu bảng ô vuông như sau: Mỗi ô vuông đơn vị được tô bằng màu đỏ hoặc màu xanh sao cho bất kì bảng ô vuông 2×3 hoặc 3×2 nào cũng có đúng hai ô được tô màu đỏ.

a) Hãy chỉ ra một cách tô màu theo quy tắc trên cho bảng ô vuông 4×6 (Điền chữ Đ vào ô được tô màu đỏ, chữ X vào ô được tô màu xanh).



Bảng ô vuông 3x2



Bảng ô vuông 2x3

b) Người ta đã tô bảng ô vuông 2021×2022 theo quy tắc trên. Hỏi bảng ô vuông này có bao nhiêu ô được tô màu đỏ?

.....HẾT.....

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – NINH BÌNH (2020 – 2021)

Câu 1.

1.

a. Ta có: $\Delta' = (m+1) - (4m - m^2) = 2m^2 - 2m + 1 = 2\left(m - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với $\forall m \in \mathbb{R}$

Do đó phương trình có hai nghiệm dương phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m+1) > 0 \\ 4m - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 0 < m < 4 \end{cases} \Rightarrow 0 < m < 4$$

b. Theo chứng minh trên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $\forall m \in \mathbb{R}$

và $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 4m - m^2 \end{cases}$

Ta có: $A = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$

$$= \sqrt{4(m+1)^2 - 4(4m - m^2)} = \sqrt{8m^2 - 8m + 4} = \sqrt{2(2m-1)^2 + 2} \geq \sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=1/2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng $\sqrt{2}$ khi $m=1/2$

b. Điều kiện: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2021 \\ 0 \leq y \leq 2021 \end{cases}$

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz có

$$4042 = (\sqrt{x} + \sqrt{2021-y})^2 \leq 2(x + 2021 - y)$$

$$\Rightarrow x - y \geq 0 \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} = \sqrt{2021-y} \Leftrightarrow x = 2021 - y$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz có

$$4042 = (\sqrt{y} + \sqrt{2021-x})^2 \leq 2(y + 2021 - x)$$

$$\Rightarrow x - y \leq 0 \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{y} = \sqrt{2021-x} \Leftrightarrow y = 2021 - x$

Từ (1) và (2) suy ra $x=y$

Từ đó suy ra $x=y=2021/2$ (thỏa mãn)

Hệ phương trình đã cho có một nghiệm $(x; y) = \left(\frac{2021}{2}; \frac{2021}{2}\right)$

Cách 2: Từ 2 phương trình của hệ ta có: $\sqrt{x} + \sqrt{2021-y} = \sqrt{y} + \sqrt{2021-x}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{2021-x} = \sqrt{y} - \sqrt{2021-y} \quad (*)$$

Xét phương trình (*):

+ Nếu $x > y$ thì $-\sqrt{2021-x} > -\sqrt{2021-y} \Rightarrow VT > VP$ (mâu thuẫn)

+ Nếu $x < y$ thì $VT < VP$ (mâu thuẫn)

+ Nếu $x = y$. Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x} + \sqrt{2021-x} = \sqrt{4042} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2\sqrt{x(2021-x)} = 2021 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (2x-2021)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2021}{2} \\ y = \frac{2021}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Hệ phương trình đã cho có một nghiệm $(x; y) = (\frac{2021}{2}; \frac{2021}{2})$

Cách 3: Từ 2 phương trình của hệ ta có: $\sqrt{x} + \sqrt{2021-y} = \sqrt{y} + \sqrt{2021-x}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y}) + (\sqrt{2021-y} - \sqrt{2021-x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \frac{x-y}{\sqrt{2021-y} + \sqrt{2021-x}} = 0$$

(Vì $(x; y) = (2021; 2021)$ không phải là nghiệm của hệ phương trình đã cho nên nếu hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thì $\sqrt{2021-y} + \sqrt{2021-x} \neq 0$)

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{2021-y} + \sqrt{2021-x}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

$$\text{(Vì } 1 + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{2021-y} + \sqrt{2021-x}} > 0 \text{)}$$

Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x} + \sqrt{2021-x} = \sqrt{4042} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2021}{2} \\ y = \frac{2021}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Hệ phương trình đã cho có một nghiệm $(x; y) = (\frac{2021}{2}; \frac{2021}{2})$

Câu 2.

1.

$$\text{a) Vì } f(x) = x^2 + ax + b \text{ nên ta có } \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(0) > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + b = 1 \\ b > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b > 3 \end{cases}$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + ax + b = x \Leftrightarrow x^2 - (b-1)x + b = 0 \quad (*)$$

Ta có $1 + [-(b-1)] + b = 0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm $x_1 = 1; x_2 = b$

Mà $b > 3$ nên $x_1 \neq x_2$

Do đó phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{b) } f(f(x)) = x \Leftrightarrow f^2(x) + af(x) + b = x \Leftrightarrow f^2(x) - bf(x) + b - x = 0$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - x^2 - bf(x) + bx + x^2 - bx + b - x = 0$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - x][f(x) + x - b + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - x][x^2 + (b-1)x + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - x = 0 \\ x^2 + (b-1)x + 1 = 0 \end{cases}$$

Phương trình $f(x) = x$ (1) có 2 nghiệm phân biệt là 1 và b

Phương trình $x^2 + (b-1)x + 1 = 0$ (2) có $\Delta = (b+1)(b-3) > 0$ (vì $b > 3$)

Nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt.

Ta lại có $x=1$; $x=b$ không là nghiệm của phương trình (2)

Vậy phương trình $f(f(x))=x$ có 4 nghiệm phân biệt.

2. Ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{x+y} = \frac{xy}{x} + \frac{xy}{y} + \frac{2}{x+y} = x + y + \frac{2}{x+y} = \frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + \frac{2}{x+y}$$

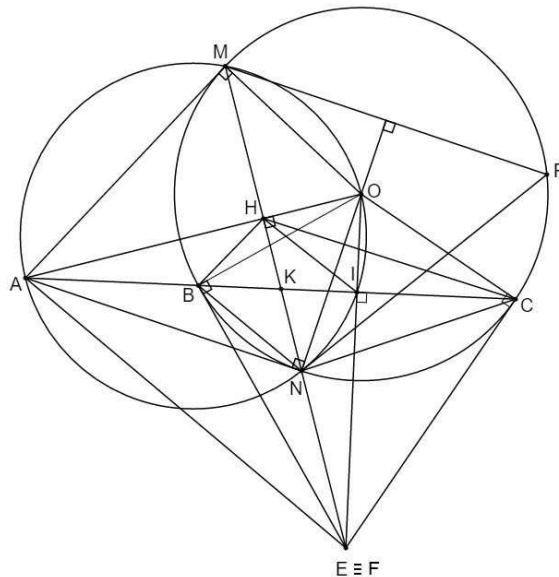
$$\text{Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: } \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \geq 1 \quad (1)$$

Tương tự áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{2}{x+y} \geq 2\sqrt{\frac{x+y}{2} \cdot \frac{2}{x+y}} = 2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{x+y} \geq 3. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } x=y=1.$$

Câu 3.



1. Ta có: $AM \perp OM$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \Delta AMO$ vuông tại M

$\Rightarrow$ Ba điểm A, M, O cùng thuộc đường tròn đường kính AO (1)

Chứng minh tương tự suy ra: ba điểm A, N, O cùng thuộc đường tròn đường kính AO (2)

Mặt khác ta có: I là trung điểm của BC (giả thiết)

$\Rightarrow OI \perp BC$ (Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)

$\Rightarrow \Delta AIO$ vuông tại I $\Rightarrow$ Ba điểm A, I, O cùng thuộc đường tròn đường kính AO (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: 4 điểm O, M, N, I cùng thuộc 1 đường tròn.

*) Ta có: $OM=ON (=R) \Rightarrow OE$ đường trung trực của MN (4)

$AM = AN$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow A \in$ đường trung trực của MN (5)

$HM = HN(gt) \Rightarrow H \in$ đường trung trực của MN (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra O, H, A thẳng hàng và OA là đường trung trực của MN

Xét ΔANO vuông tại N có $NH \perp AO$ (OA là đường trung trực của MN)

$\Rightarrow AN^2 = AH \cdot AO$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông) (*)

Chứng minh $\Delta ABN \sim \Delta ANC(g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow AN^2 = AB \cdot AC$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $AB \cdot AC = AH \cdot AO \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AO}{AC}$

$\Delta ABH \sim \Delta AOC(c.g.c) \Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{ACO}$ (7)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHOC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CHO} = \widehat{CBO}$

Mà $\widehat{BCO} = \widehat{CBO}$ nên $\widehat{BCO} = \widehat{CHO}$ (8)

Từ (7) và (8) suy ra: $\widehat{AHB} = \widehat{CHO} \Rightarrow \widehat{KHB} = \widehat{CHK}$ (phụ với hai góc bằng nhau)

$\Rightarrow HK$ là tia phân giác của góc BHC

2.

Cách 1: Tứ giác $AMPN$ là hình bình hành thì suy ra $\begin{cases} MO \perp NP \\ NO \perp MP \end{cases}$

Suy ra O vừa là trực tâm vừa là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP

$\Rightarrow \Delta MNP$ là tam giác đều.

Do bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP bằng R nên $MP = R\sqrt{3} = AN$

Xét tam giác vuông ANO ta có $AO = \sqrt{AN^2 + NO^2} = 2R$

$\Rightarrow A$ là giao điểm của đường tròn $(O; 2R)$ với tia đối của tia BC

Khi A là giao điểm của đường tròn $(O; 2R)$ với tia đối của tia BC , chứng minh tứ giác $AMPN$ là hình bình hành

Vậy A là giao điểm của đường tròn $(O; 2R)$ với tia đối của tia BC thì tứ giác $AMPN$ là hình bình hành

Cách 2: Tứ giác $AMPN$ là hình bình hành $\Rightarrow AP$ đi qua trung điểm H của MN

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMPN$ là hình thoi (hình bình hành có hai đường chéo vuông góc)

$\Rightarrow A, H, O, P$ thẳng hàng và $\widehat{MAP} = \widehat{MPA}$

Xét $(O; R)$ có $\widehat{MPA} = \frac{\widehat{MOA}}{2}$ (hệ quả góc nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{MAO} = \frac{\widehat{MOA}}{2} \Rightarrow \widehat{MAO} = 30^\circ$ (ΔAMO vuông tại M)

$\Rightarrow MO = \frac{AO}{2}$ (cạnh đối diện với góc 30° trong tam giác vuông) $\Rightarrow OA = 2R$

Khi A là giao điểm của đường tròn với $(O; 2R)$ với tia đối của tia BC , ta chứng minh được tứ giác $AMPN$

là hình bình hành.

Vậy A là giao điểm của đường tròn với $(O; 2R)$ với tia đối của tia BC thì tứ giác $AMPN$ là hình bình hành.

Câu 4:

1. Tìm các số nguyên x, y thoả mãn: $x^2 - 5x + 7 = 3^y$ (*)

Nếu $y \leq 0$ ta có: $x^2 - 5x + 7 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

Do x nguyên nên ta có $x \in \{2; 3\}$

Lần lượt thay giá trị của x vào phương trình (*) tìm được $(x; y) \in \{(2; 0); (3; 0)\}$

+ Nếu $y = 1$ thì phương trình (*) trở thành: $x^2 - 5x + 7 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow (x; y) \in \{(1; 1); (4; 1)\}$ thỏa mãn phương trình (*)

+ Nếu $y \geq 2$ thì $3^y : 9$

Cách 1: Ta xét VT (*) theo các trường hợp số dư của x khi chia cho 3

- Nếu $x = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $x^2 - 5x + 7 = 9k^2 - 15k + 7$ không chia hết cho 3

- Nếu $x = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $x^2 - 5x + 7 = (3k + 1)^2 - 5(3k + 1) + 7 = 9k^2 - 9k + 3$ không chia hết cho 9 nên phương trình (*) vô nghiệm

- Nếu $x = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $x^2 - 5x + 7 = (3k + 2)^2 - 5(3k + 2) + 7 = 9k^2 - 3k + 3$ không chia hết cho 3 nên phương trình (*) vô nghiệm

Cách 2: Ta có $x^2 - 5x + 7 = 3^y \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 - 3^y = 0$ (1)

Coi phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn x , tham số y có:

$$\Delta = 25 - 4(7 - 3^y) = 3(4 \cdot 3^{y-1} - 1)$$

Vì $(4 \cdot 3^{y-1} - 1)$ không chia hết cho 3 nên Δ phải là số chính phương

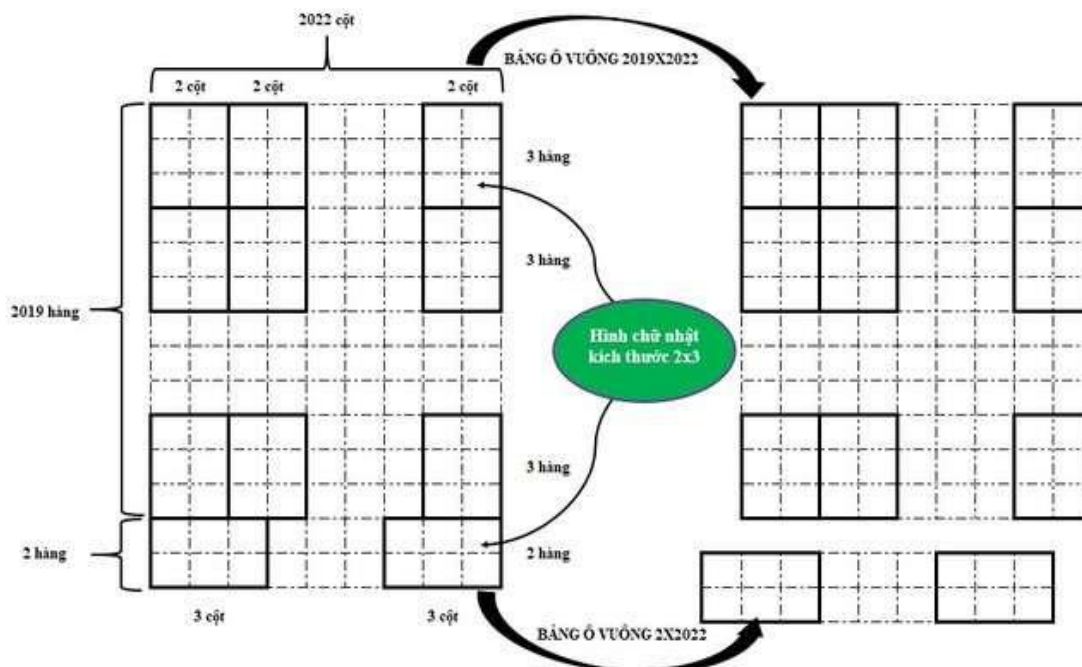
Với y nguyên, $y \geq 2$ phương trình (1) là phương trình bậc hai có hệ số nguyên mà Δ không phải là số chính phương nên phương trình (1) không có nghiệm nguyên

Vậy $(x; y) = \{(2; 0); (3; 0); (1; 1); (4; 1)\}$.

2.a). Chỉ ra 1 cách tô đúng.

Đ	X	X	Đ	X	X
X	Đ	X	X	Đ	X
X	X	Đ	X	X	Đ
Đ	X	X	Đ	X	X

b)



Chia bảng ô vuông ban đầu thành hai bảng ô vuông 2019×2022 và 2×2022 (xem hình vẽ minh họa)

Bảng ô vuông 2019×2022 được chia thành $\frac{2022}{2} \times \frac{2019}{3} = 680403$ bảng ô vuông 3×2

Trong bảng ô vuông 2019×2022 có $680403 \cdot 2 = 1360806$ ô được tô màu đỏ

Bảng ô vuông 2×2022 được chia thành $\frac{2}{2} \times \frac{2022}{3} = 674$ bảng ô vuông 2×3 .

Trong bảng ô vuông 2×2022 có $674 \cdot 2 = 1348$ ô được tô màu đỏ.

Bảng ô vuông ban đầu có: $1360806 + 1348 = 1362154$ ô được tô màu đỏ.