

Câu 1. (2,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{x - \sqrt{x} - 3}{x - \sqrt{x} - 2} \right) : \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} - 2} + \frac{2}{\sqrt{x} - 2} \right)$

- 1) Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa
- 2) Tìm x để $P = 1$

Câu 2. (2,5 điểm)

- 1) Cho Parabol $(P): y = 3x^2$ và đường thẳng $(d): y = 6x + 2m - 1$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt
- 2) Cho phương trình $x^2 - 6x + 2m + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 < 72$

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). I là điểm thuộc đoạn BC ($IB < IC$). Kẻ đường thẳng d vuông góc với OI tại I . Đường thẳng d cắt đường thẳng AB, AC lần lượt tại E, F

- 1) Chứng minh rằng: $OIBE, OIFC$ là các tứ giác nội tiếp
- 2) Chứng minh I là trung điểm của EF
- 3) Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q . Tìm vị trí của điểm A để diện tích APQ nhỏ nhất

Câu 4. (1,0 điểm) Giải phương trình :

$$\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - x + 2}$$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho $abc > 0$ thỏa mãn $a + b + c + ab + bc + ca = 6abc$.

Chứng minh $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3$

ĐÁP ÁN

Câu 1.a) DKXD: $x \geq 0, x \neq 4$

$$P = \left[\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{x - \sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} + \frac{2}{\sqrt{x} - 2} \right]$$

$$= \frac{x - 4 - x + \sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} : \frac{x - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x} + 2}$$

$$b) P = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x} + 2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = x + \sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow x = -3 \text{ (không thỏa)}$$

Vậy không có giá trị của x để $P = 1$ **Câu 2.**

1. Phương trình hoành độ giao điểm: $3x^2 = 6x + 2m - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 2m + 1 = 0$
 (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi $\Delta' = 3^2 - 3(-2m + 1) > 0 \Leftrightarrow m > -1$

2. Điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là: $9 - (2m + 1) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4$

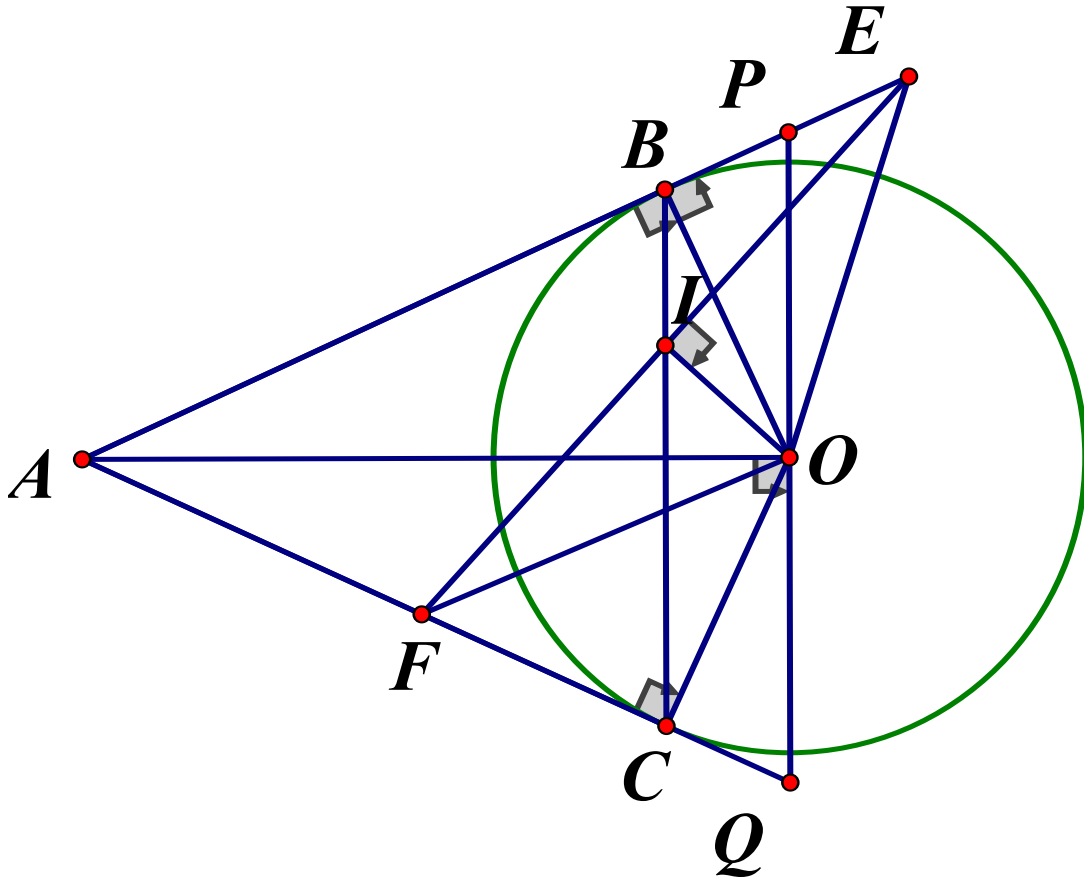
Áp dụng hệ thức Vi – et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 x_2 = 2m + 1 \end{cases}$. Theo đề bài:

$$x_1^3 + x_2^3 < 72 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2] < 72$$

$$\Leftrightarrow 6(6^2 - 6m - 3) < 72 \Leftrightarrow 33 - 6m < 12 \Leftrightarrow m > \frac{7}{2}$$

So sánh với điều kiện ta có: $\frac{7}{2} < m \leq 4$

Câu 3.



- 1) +Vì $\angle OIE = \angle OBE = 90^\circ$, I, B kề nhau $\Rightarrow OIBE$ là tứ giác nội tiếp
 +)Vì $\angle OCF + \angle OIF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow OIFC$ là tứ giác nội tiếp
 2) +Vì $OIFC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle F_1 = \angle C_1 = \angle B_1$ (do $\triangle OBC$ cân tại O)
 +Vì $OIBE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle B_1 = \angle E_1$

$\Rightarrow \angle F_1 = \angle E_1 \Rightarrow \triangle OEF$ cân tại O mà $OI \perp EF \Rightarrow IE = IF$

$$3) S_{APQ} = S_{OAP} = OB \cdot AP = R(BA + BP) \geq R \cdot 2\sqrt{BP \cdot BA}$$

Dấu "=" xảy ra khi $BP = BA$ mà $OB \perp AP \Rightarrow \triangle OAP$ cân tại O

$\Rightarrow AO = OP = OQ \Rightarrow \triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow ABOC$ là hình vuông

$$\Rightarrow AB = OB = OC = OA = R \Rightarrow AO = R\sqrt{2}$$

Vậy A cách O một khoảng $R\sqrt{2}$ thì S_{APQ} nhỏ nhất

Câu 4.

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ x \geq \frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} . \text{ Ta có:}$$

$$\left(\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{2x^2-1}\right)+\left(\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2-3x-2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+4}{\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-1}}+\frac{2x+4}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\left(\frac{2}{\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-1}}+\frac{2}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2\left(\text{do } \frac{2}{\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-1}}+\frac{2}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}>0\right)$$

Câu 5.

$$*) a+b+c+ab+bc+ca=6abc \Leftrightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$$

$$*) \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab}; \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{2}{bc}; \frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2} \geq \frac{2}{ac} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) (1)$$

$$*) \frac{1}{a^2}+1 \geq \frac{2}{a}; \frac{1}{b^2}+1 \geq \frac{2}{b}; \frac{1}{c^2}+1 \geq \frac{2}{c} \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3 \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) (2)$$

$$(1) \text{ vs } (2) \Rightarrow 3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+3 \geq 2.\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2.6=12$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq 3$$