

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

Môn: Toán
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I (5,0 điểm).

- Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tìm trên (C) các điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.
- Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-3)^{2024} (5^{2x} - 5^x + 1)(x^2 - 2x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ có đúng ba điểm cực trị x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 50$.

Câu II (4,0 điểm).

- Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $\log_2(x+2y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$ và $x + y > 0; x \in [-2024; 2024]$?

2. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} \frac{2y + \sqrt{1+4y^2}}{x + x\sqrt{1+x^2}} = 2 \log_3 \frac{1}{9} \cdot \log_9(2y) \\ 2024^{2x(1-y)} + 1 = 2x(1 + \sqrt{2y^2 - 2y + 1}). \end{cases}$$

Câu III (2,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + x \cos x (4 + 2 \sin 2x + x \cos 2x)}{\cos x \sqrt{2 + \sin 2x}} dx$.

Câu IV (5,0 điểm).

- Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 15$, $BC = AB = 5$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh SD và I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{AI}$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC . Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng SI và AM .

a) Tính thể tích khối tứ diện $CDMI$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SC .

b) Tính thể tích khối nón có đáy là hình tròn ngoại tiếp ΔEFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

- Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, ΔABC vuông tại A , $AB = 2AC$. Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EC'} = -2\overrightarrow{EC}$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BE)$ bằng 12. Gọi α là góc giữa mặt phẳng $(A'BE)$ và mặt phẳng (ABC) . Tìm $\cos \alpha$ để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu V (2,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $B(-9;1;-4)$, $C(-9;7;4)$. Trong các ΔABC thỏa mãn điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) , các đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B và C vuông góc với nhau sao cho góc A lớn nhất. Viết phương trình mặt cầu đường kính OA với O là gốc tọa độ.

Câu VI (2,0 điểm). Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 1 \leq 2x + 3y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3 + x^2 + 36}{2(x+1)} + \frac{y^3 + y^2 + 36}{4(y+1)} + \frac{2z^3 + z^2 + 9}{2z+1}$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Người coi thi số 1:.....Người coi thi số 2:.....