

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

Môn: TOÁN
Thời gian làm bài thi: 150 phút
Ngày thi: 23/3/2023

Câu 1 (3,0 điểm).

1) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$ với $0 \leq x \neq 1$.

2) So sánh hai số $M = \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$ và $N = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$.

Câu 2 (3,0 điểm). Giải phương trình và hệ phương trình sau:

1) $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$; 2) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x-1}} = 2 \\ x+y = \sqrt{2} \end{cases} (x > 1, y > 0).$

Câu 3 (3,0 điểm).

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $2x^2 + y^2 + 3xy - 3x - 3y + 11 = 0$.

2) Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a + b + c = 4046$. Chứng minh rằng

$$P = (a+b)(b+c)(c+a) - 6abc \text{ chia hết cho } 14.$$

Câu 4 (4,0 điểm).

1) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm A thuộc parabol $(P): y = -x^2$ có tung độ $y_A = -4$. Tìm tọa độ các điểm B thuộc (P) sao cho tam giác OAB vuông tại B .

2) Cho các số x, y, z thỏa mãn $1 \leq x, y, z \leq 3$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y + z + 1)$. Chứng minh bất đẳng thức $11 \leq xy + yz + zx \leq (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 5 (5,0 điểm). Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O) . Từ M vẽ hai tiếp tuyến MA, MC của đường tròn (O) (A, C là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MBD của (O) sao cho B nằm giữa M và D , $BC < BD$.

1) Chứng minh $\frac{MC}{MD} = \frac{BC}{CD}$ và $AD \cdot BC = AB \cdot CD$.

2) Trên đoạn BD lấy điểm F sao cho $\widehat{FAD} = \widehat{BAC}$. Chứng minh hai tam giác ABF, ACD đồng dạng và $AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$.

3) Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt MC tại N và cắt đường thẳng CD tại P ; ND cắt đường tròn (O) tại E . Chứng minh A, E, P thẳng hàng.

Câu 6 (2,0 điểm). Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O) . Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến AED (E nằm giữa A và D) không đi qua O cắt BC ở F . Hai tia CE và DB cắt nhau ở G , trên tia đối của tia BC lấy điểm H sao cho tứ giác $CDHG$ nội tiếp đường tròn.

1) Chứng minh $\frac{1}{AD} + \frac{1}{AE} = \frac{2}{AF}$.

2) Khi tam giác CDG có diện tích bằng 1, chứng minh $S_{\triangle AEG} \leq \frac{DE^2}{4BC^2}$.

—————HẾT—————