

Câu 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = 2022 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{n+2022}{nu_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $\lim u_n = +\infty$.

b) Tìm giới hạn $\lim \frac{u_n^2}{2n+1}$.

Câu 2 (5,0 điểm). Cho $P(x)$ là đa thức monic bậc n (với $n \in \mathbb{N}^*$) có đúng n nghiệm thực phân biệt. Biết rằng tồn tại duy nhất số thực a mà $P(a^2 + 4a + 2022) = 0$. Chứng minh rằng đa thức $P(x^2 + 4x + 2022)$ chia hết cho đa thức $(x+2)^2$ và $P(2022) \geq 4^n$.

Câu 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC có $AB = AC$, I là tâm đường tròn nội tiếp và (T) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Các đường thẳng BI và CI lần lượt cắt (T) tại điểm thứ hai là M và N . Gọi D là điểm thuộc (T) , nằm trên cung BC không chứa A ; E, F lần lượt là các giao điểm của AD với BI và CI ; P là giao điểm của DM với CI ; Q là giao điểm của DN với BI .

a) Chứng minh rằng các điểm D, I, P, Q cùng nằm trên một đường tròn (Ω) .

b) Chứng minh rằng các đường thẳng CE và BF cắt nhau tại một điểm trên đường tròn (Ω) .

Câu 4 (5,0 điểm). Cho A là tập hợp gồm các số nguyên dương thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

a) Nếu $a \in A$ thì tất cả các ước số dương của a cũng thuộc A ;

b) Nếu $a, b \in A$ mà $1 < a < b$ thì $1 + ab \in A$.

Chứng minh rằng nếu A có ít nhất 3 phần tử thì A là tập hợp tất cả các số nguyên dương.

-----HẾT-----

Câu 5 (6,0 điểm). Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x - 3f(y)) = xf(y) - yf(x) - 2f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 6 (7,0 điểm). Cho số nguyên tố $p > 3$.

- a) Giả sử $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(p-1)^2} = \frac{m}{n}$, với m và n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng m chia hết cho p .
- b) Chứng minh rằng $C_{5p-1}^{p-1} - 1$ chia hết cho p^3 .

Câu 7 (7,0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng l đối xứng với đường thẳng AC qua đường thẳng BC , l cắt BO tại X . Điểm E tùy ý trên đoạn BO , đường tròn ngoại tiếp tam giác XAE cắt đường thẳng l tại Q khác X . Đường thẳng QE cắt đường thẳng OC tại Y .

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AYE đi qua điểm cố định khi E thay đổi trên đoạn BO .

b) Gọi M là điểm chính giữa cung AE không chứa Y của đường tròn ngoại tiếp tam giác AYE và CM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AYE tại một điểm K khác M . Chứng minh rằng khi E thay đổi trên đoạn BO thì đường thẳng KE luôn đi qua một điểm cố định.

-----HẾT-----