

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS CẤP TỈNH
THỪA THIÊN HUẾ

NĂM HỌC 2023 - 2024

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b) Cho a, b, c là các số thực sao cho $a+b+c=2$ và $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho n là số nguyên dương và $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 2. Chứng minh rằng $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 8.

b) Xác định tất cả các cặp số $(a; b)$ với a, b nguyên dương sao cho phương trình $ax^2 - bx + 2a + 3 = 0$ (với x là ẩn số) có hai nghiệm nguyên dương phân biệt.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Chứng tỏ rằng không tồn tại cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^3 + 1 = 4y^2$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$. Chứng minh rằng

$$a+b+c \geq 3 \text{ và } \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{c+1} + \frac{c^2}{a+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Một tập hợp A chỉ chứa các phần tử thuộc X được gọi là “tập tốt” nếu không tồn tại hai phần tử a, b thuộc A sao cho $a < b$ và b chia hết cho a .

a) Hãy tìm một “tập tốt” có đúng 10 phần tử.

b) Gọi A là một “tập tốt” bất kỳ có đúng 10 phần tử. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m lẻ và $m < 20$, luôn tồn tại a thuộc A sao cho a chia hết cho m .

Câu 5. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , có đường cao AD và trung tuyến AM . Kẻ đường kính AE , tia EM cắt AD tại H và cắt (O) tại F ($F \neq E$).

a) Chứng minh M là trung điểm EH và $BC^2 = 4ME \cdot MF$.

b) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác FBH .

c) Chứng minh tứ giác $AFDM$ nội tiếp và $\widehat{BFD} = \widehat{MAC}$.

— HẾT —

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

Chữ kí của cán bộ coi thi 1:; Chữ kí của cán bộ coi thi 2: