

Bài 1: (4,0 điểm)

a) (1,5 điểm) Tìm số nguyên dương n lớn nhất để $A = 4^{27} + 4^{2021} + 4^n$ là số chính phương.

b) (1,5 điểm) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $xy^3 + y^2 + 4xy = 6$.

c) (1,0 điểm) Số nhà bạn An là số có hai chữ số $\overline{ab}$ biết $\overline{ab} = (a-1)^2 + (b-1)^2$.

Tìm số nhà bạn An.

Bài 2: (4,0 điểm)

a) (2,0 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{5-4x} + \sqrt[3]{x+7} = 3$.

b) (2,0 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 2x \\ x(x+y)^2 + x - 2 = 2y^2 \end{cases}$$

Bài 3: (4,0 điểm)

a) (2,0 điểm) Cho các số dương a, b thỏa mãn: $a + b = \sqrt{2021-a^2} + \sqrt{2021-b^2}$.
Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 = 2021$.

b) (2,0 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 1 - xy$; trong đó x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x^{2021} + y^{2021} = 2x^{1010}y^{1010}$.

Bài 4: (7,0 điểm)

a) (1,5 điểm) Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Từ M kẻ tia MD song song với AB (với D thuộc BC), tia ME song song với BC (với E thuộc AC) và tia MF song song với AC (với F thuộc AB). Chứng minh rằng: $3S_{DEF} \leq S_{ABC}$ (S_{ABC} : diện tích tam giác ABC , S_{DEF} : diện tích tam giác DEF).

b) (5,5 điểm) Từ điểm P kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với đường tròn $(O;R)$; A, B là tiếp điểm. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A đến đường kính BC của đường tròn.

i) Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm của AH .

ii) Cho $OP = a$. Tính độ dài AH theo R và a .

iii) Đường thẳng d đi qua P sao cho khoảng cách từ O đến đường thẳng d bằng $R\sqrt{2}$, đường thẳng vuông góc với PO tại O cắt tia PB tại M . Xác định vị trí của điểm P trên đường thẳng d để diện tích tam giác POM nhỏ nhất.

Bài 5: (1,0 điểm) Trên công trường có những thanh sắt dài 7,4 m. Người ta muốn cắt các thanh sắt đó thành các đoạn dài 0,7 m và 0,5 m để sử dụng.

a) (0,5 điểm) Em hãy nêu phương án cắt mà không phải hàn nối các đoạn sắt cần dùng.

b) (0,5 điểm) Muốn có 1000 đoạn sắt 0,7 m và 2000 đoạn sắt 0,5 m. Ta phải dùng ít nhất bao nhiêu thanh sắt 7,4 m nêu trên?

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – QUẢNG NGÃI (2020 – 2021)

Bài 1.

a) $A = 4^{27} + 4^{2021} + 4^n = (2^{27})^2 (1 + 4^{1994} + 4^{n-27})$

Vì A và $(2^{27})^2$ là số chính phương nên $1 + 4^{1994} + 4^{n-27}$ là số chính phương

Ta có: $1 + 4^{1994} + 4^{n-27} > 4^{n-27} = (2^{n-27})^2$

Mà $1 + 4^{1994} + 4^{n-27}$ là số chính phương nên ta có:

$1 + 4^{1994} + 4^{n-27} \geq (2^{n-27} + 1)^2 \Leftrightarrow 2^{n-27} \leq 2^{3987} \Leftrightarrow n \leq 4014$

Với $n = 4014$ thì $A = 4^{27} + 4^{2021} + 4^{4014} = (2^{27} + 2^{4014})^2$ là số chính phương

Vậy $n=4014$

b) Ta có:

$xy^3 + y^2 + 4xy = 6$

$\Leftrightarrow xy^3 + 4xy + y^2 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow xy(y^2 + 4) + y^2 + 4 - 10 = 0$

$\Leftrightarrow (xy + 1)(y^2 + 4) = 10$

Vì $y^2 + 4 > 0$, $10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$

Suy ra:

TH1: $\begin{cases} xy + 1 = 1 \\ y^2 + 4 = 10 \end{cases}$ (loại)

TH2: $\begin{cases} xy + 1 = 10 \\ y^2 + 4 = 1 \end{cases}$ (loại)

TH3: $\begin{cases} xy + 1 = 2 \\ y^2 + 4 = 5 \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (1; 1) = (-1; -1)$

TH4: $\begin{cases} xy + 1 = 5 \\ y^2 + 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (4; 1) = (-4; -1)$

Vậy $(x; y) = (1; 1) = (-1; -1) = (4; 1) = (-4; -1)$

c) Ta có:

$\overline{ab} = (a-1)^2 + (b-1)^2$

$\Leftrightarrow a \cdot 10 + b = (a-1)^2 + (b-1)^2$

$\Leftrightarrow 10a + b = a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1$

$\Leftrightarrow a^2 - 12a + 1 + b^2 - 3b + 1 = 0$

Do $1 \leq a \leq 9$ nên ta có bảng sau:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	Loại	6	Loại	Loại	Loại	Loại	Loại	Loại	Loại

Suy ra $a=2, b=6$.

Kết luận: Số nhà là 26

Bài 2.

a) Điều kiện: $x \leq \frac{5}{4}$

Phương trình tương đương:

$$\sqrt{5-4x}-1+\sqrt[3]{x+7}-2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-4x}{\sqrt{5-4x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4} - \frac{4}{\sqrt{5-4x}+1} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4} - \frac{4}{\sqrt{5-4x}+1} = 0(*) \end{cases}$$

Phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

b) Từ phương trình $x^2 + y^2 + xy + 1 = 2x \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2 = 4x$

Khi đó ta có:

$$2x^3 + x(x+y)^2 + x - 2 + 2xy + 2 = 4x \Leftrightarrow x[(x+y)^2 + 2(x+y) - 3] = 0 \Leftrightarrow x(x+y-1)(x+y+3) = 0$$

Xét $x=0$ thế vào phương trình $x^2 + y^2 + xy + 1 = 2x$ ta được: $y^2 + 1 = 0$ (vô nghiệm)

Xét $x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$, thế vào phương trình $x^2 + y^2 + xy + 1 = 2x$ ta được:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=2 \Rightarrow y=-1 \end{cases}$$

Xét $x+y+3=0 \Leftrightarrow y=-x-3$, thế vào phương trình $x^2 + y^2 + xy + 1 = 2x$ ta được:

$$x^2 + x + 10 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy hệ có nghiệm: $(x;y)=(1;0)=(2;-1)$

Bài 3.

a) Từ giả thiết $\Rightarrow a - \sqrt{2021-b^2} = \sqrt{2021-a^2} - b$

$$\Rightarrow \frac{a^2 - (2021-b^2)}{a + \sqrt{2021-b^2}} = \frac{(2021-a^2) - b^2}{\sqrt{2021-a^2} + b} \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - 2021}{a + \sqrt{2021-b^2}} = -\frac{a^2 + b^2 - 2021}{\sqrt{2021-a^2} + b}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2021) \left(\frac{1}{a + \sqrt{2021-b^2}} + \frac{1}{\sqrt{2021-a^2} + b} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2021 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2021$$

b) Từ giả thiết ta có:

+ Nếu $x=0 \Rightarrow y=0; y=0 \Rightarrow x=0$

+ Nếu $x, y \neq 0$ thì:

$$x^{2021} + y^{2021} = 2x^{1010}y^{1010}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{2021} + y^{2021}}{x^{1010}y^{1010}} = 2$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{1010} + y \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{1010} = 2 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{x}{y}\right)^{1010} \neq 0 \text{ thì: } (*) \Leftrightarrow xt + y \cdot \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow xt^2 - 2t + y = 0$$

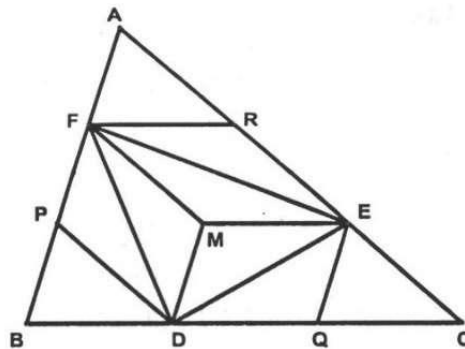
$$\text{Có } \Delta' = 1 - xy$$

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' = 1 - xy \geq 0 \Leftrightarrow xy \leq 1$

Nên giá trị nhỏ nhất của P là 0. Dấu "=" xảy ra khi $xy=1$

Bài 4.

a)



Từ D, E, F lần lượt vẽ các đường thẳng song song với MF, MD và ME cắt AB, BC và AC lần lượt tại P, Q, O.

$$\text{Ta có } FR \parallel BC \text{ nên } \triangle AFR \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{AFR}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AF}{AB}\right)^2$$

Tương tự: $\frac{S_{BDP}}{S_{ABC}} = \left(\frac{BP}{AB}\right)^2 = \frac{BP^2}{AB^2}$

$\Rightarrow \frac{S_{CQE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{QE}{AB}\right)^2 = \frac{PF^2}{AB^2}$

Vì MDQE; MDPF là các hình bình hành.

Suy ra: $\frac{S_{AFR}}{S_{ABC}} + \frac{S_{BDP}}{S_{ABC}} + \frac{S_{CQE}}{S_{ABC}} = \frac{AF^2}{AB^2} + \frac{BP^2}{AB^2} + \frac{PF^2}{AB^2} \geq 3\sqrt{\frac{AF^2}{AB^2} \cdot \frac{BP^2}{AB^2} \cdot \frac{PF^2}{AB^2}}$

Dấu “=” xảy ra khi $AF = FP = PB = \frac{1}{3}AB$ khi đó M là trọng tâm của ΔABC .

Nên $\frac{S_{AFR} + S_{BDP} + S_{CQE}}{S_{ABC}} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow S_{AFR} + S_{BDP} + S_{CQE} \geq \frac{1}{3}S_{ABC}$

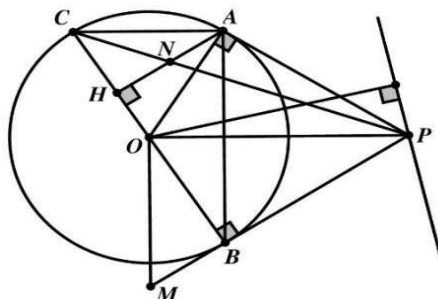
Suy ra: $S_{DQERFP} \leq \frac{2}{3}S_{ABC}$

Mặt khác: MERF; MDQE; MDPF là các hình bình hành

Nên $S_{MEF} = S_{REF}; S_{MDE} = S_{QDE}; S_{MDF} = S_{PDF}$

$S_{DEF} = S_{MEF} + S_{MDE} + S_{MDF} = \frac{1}{2}S_{DQERFP} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}S_{ABC}$ nên $3S_{DEF} \leq S_{ABC}$.

b)



Gọi CP cắt AH tại N;

Ta có $OA = OB = R$; $AP = PB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra OP là đường trung trực của AB hay $OP \perp AB$ tại K.

Xét ΔACH và ΔPOB có

$\angle AHC = \angle PBO = 90^\circ$

$\angle ACH = \angle POB$ (cùng phụ với $\angle ABC$)

Do đó $\Delta ACH \sim \Delta POB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{PB} = \frac{CH}{OB}$ (1)

Xét ΔCPB có $AH \parallel BP$ (GT) nên $\frac{NH}{PB} = \frac{CH}{CB} \Rightarrow \frac{2NH}{PB} = \frac{CH}{OB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AH = 2NH$ hay $AN = NH$.

Xét ΔABC vuông ở A với đường cao AH có:

$$AH^2 = BH.CH = (2R - CH).CH \quad (3).$$

Từ (2) ta có $CH = \frac{2NH.OB}{PB}$ thay vào (3), kết hợp với $AH = 2NH$ ta được:

$$AH^2 = \left(2R - \frac{AH.CB}{2PB}\right) \cdot \left(\frac{AH.CB}{2.PB}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4PB^2.AH^2 = (4R.PB - AH.CB).AH.2R = 8R^2.PB.AH - 4R^2.AH^2$$

$$\Leftrightarrow PB^2.AH = 2R^2.PB - R^2.AH$$

$$\Leftrightarrow AH(PB^2 + R^2) = 2R^2.PB$$

Thay $PB^2 = m^2 - R^2$ vào hằng đẳng thức trên ta được:

$$AH = \frac{2R^2}{m^2} \sqrt{m^2 - R^2}$$

$$\text{Ta có: } S_{MOP} = \frac{1}{2} MP.OB = \frac{1}{2} (PB + BM).OA = \frac{1}{2} (PB + MB).R \quad (4)$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức AM-GM có: } \frac{1}{2} (PB + MB) \geq \sqrt{PB.BM} \quad (5)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $PB = BM$

$$\Delta MOP \text{ vuông tại O với } OB \perp PB, \text{ có: } PB.MB = OB^2 = R^2 \quad (6)$$

Từ (4), (5), (6) suy ra $S_{MOP} \geq R^2$

Do đó $\min S_{MOP} = R^2 \Leftrightarrow PB = BM = R$.

$$\Leftrightarrow \Delta PBO \text{ vuông cân tại B} \Leftrightarrow OP = R\sqrt{2}.$$

Vậy ΔMOP có diện tích nhỏ nhất khi $OP = R\sqrt{2}$. Khi đó P là chân đường vuông góc hạ từ O đến đường thẳng d.

Bài 5.

a) Phương án: cắt mỗi thanh thành 2 đoạn 0,7 m và 0,5 m

b)

Ta thấy rằng muốn tiết kiệm vật liệu thì cần phải cắt mỗi thanh 7,4 m thành a đoạn 0,7m, b đoạn 0,5m không dư. Tức là cần giải phương trình:

$$\begin{aligned}74 &= 7a + 5b \geq 7a \\ \Rightarrow 0 < a &\leq 10 \\ b &= \frac{74-7a}{5} = 15 - a - \frac{1+2a}{5}\end{aligned}$$

Và $b \in \mathbb{Z}$ thì $(1+2a) : 5$

Ta có:

$$\begin{aligned}74 &\geq 5b \\ \Rightarrow 0 < b &\leq 14\end{aligned}$$

Và $0 < 1+2a \leq 21$

Vì $1+2a$ là số lẻ nên ta suy ra:

$$\begin{aligned}0,7a + 0,5b &= 7,4; a, b \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow 7a + 5b &= 74 \\ \begin{cases} 1+2a=5 \\ 1+2a=15 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \Rightarrow b=12 \\ a=7 \Rightarrow b=5 \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy ta có hai cách cắt một thanh 7,4 m tiết kiệm

Cắt thành 2 đoạn 0,7m và 12 đoạn 0,5m

Cắt thành 7 đoạn 0,7 và 5 đoạn 0,5 m.

Bây giờ ta chọn các tiết kiệm nhất trong hai cách trên

Gọi x thanh cắt theo kiểu thứ nhất, y thanh cắt theo kiểu thứ hai.

Như vậy số đoạn 0,7m là: $2x + 7y$

Số đoạn 0,5m là: $12x + 5y$

Để có 1000 đoạn 0,7m và 2000 đoạn 0,5m nên x, y là nghiệm hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + 7y = 1000 \\ 12x + 5y = 2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 121 \\ y = 108 \end{cases}$$

Vậy đã cắt được $2x + 7y = 998$ đoạn 0,7m

Và $12x + 5y = 1992$ đoạn 0,5 m

Ta chỉ cần cắt thêm một thanh theo kiểu thứ nhất

Vậy đã dùng tất cả $121 + 108 + 1 = 230$ thanh $7,4m$

Điều quan trọng lúc này chúng ta cần chỉ ra rằng cách cắt này là tiết kiệm nhất.

Thật vậy, ta thấy tổng số độ dài của 1000 đoạn $0,7m$ và 2000 đoạn $0,5m$ là:

$$0,7.1000 + 0,5.2000 = 1700m \quad 0,7.1000 + 0,5.2000 = 1700m$$

Vậy phải dùng ít nhất $1700 : 7,4 \approx 230$ thanh