

Bài 5	Nội dung	Điểm
(7 điểm)	a) Cho m, n là hai số nguyên dương lẻ với $m > n > 1$ thỏa mãn $n^2 - 1$ chia hết cho $m^2 - n^2 + 1$. Biết rằng $m^2 - n^2 + 1$ chia hết cho 39, chứng minh $m^2 - n^2 + 1$ chia hết cho 39^2.	
	Bổ đề. Xét các số nguyên dương x, y, n thỏa mãn phương trình $(x + y)^2 = n(4xy + 1)$. Khi đó n là số chính phương. Chứng minh. Cố định n và xét tất cả các cặp (x, y) nguyên dương thỏa mãn phương trình $(x + y)^2 = n(4xy + 1)$, có nghĩa là xét tập $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid (x + y)^2 = n(4xy + 1)\}$ Vì S là tập các cặp số nguyên dương nên luôn tồn tại một cặp $(x_0; y_0)$ trong S mà $x_0 + y_0$ đạt giá trị nhỏ nhất và $x_0 \geq y_0$. Xét phương trình $(x + y_0)^2 = n(4xy_0 + 1) \Leftrightarrow x^2 - (4n - 2)y_0x + y_0^2 - n = 0$ là một phương trình bậc hai ẩn x. Khi đó x_0 là một nghiệm của phương trình trên. Như vậy theo định lý Viète thì phương trình còn có một nghiệm nữa là x_1 và $\begin{cases} x_0 + x_1 = (4n - 2)y_0 \\ x_0 \cdot x_1 = y_0^2 - n \end{cases}$ Từ hệ thức thứ nhất $x_0 + x_1 = (4n - 2)y_0$ ta suy ra được x_1 là số nguyên.	1,5
	Ta xét các trường hợp sau - Nếu $x_1 < 0$ thì từ hệ thức thứ hai $x_0 \cdot x_1 = y_0^2 - n$ ta được $y_0^2 - n < 0 \Rightarrow y_0^2 < n$, ta suy ra $x_1^2 - (4n - 2)y_0x_1 + y_0^2 - n = (x_1 + y_0)^2 + n(-4x_1y_0 - 1) > 0$ điều này mâu thuẫn vì x_1 là nghiệm của phương trình. - Nếu $x_1 = 0$, khi đó từ $x_0 \cdot x_1 = y_0^2 - n$ ta được $y_0^2 - n = 0 \Rightarrow n = y_0^2$ là số chính phương. - Nếu $x_1 > 0$ thì ta được $y_0^2 - n > 0 \Rightarrow n < y_0^2$. Khi đó $(x_1; y_0)$ là một nghiệm của phương trình $(x + y)^2 = n(4xy + 1)$. Theo cách chọn cặp số (x_0, y_0) ta có $x_0 + y_0 \leq x_1 + y_0 \Rightarrow y_0 \leq x_0 \leq x_1$ Kéo theo $y_0^2 - (4n - 2)y_0^2 + y_0^2 - n = (4 - 4n)y_0^2 - n \geq 0$, điều này vô lý vì n là số nguyên dương. Bổ đề được chứng minh hoàn tất. Trở lại bài toán. Theo giả thiết, ta có $n^2 - 1$ chia hết cho $m^2 - n^2 + 1$ nên ta được $(n^2 - 1) + (m^2 - n^2 + 1)$ chia hết cho $m^2 - n^2 + 1$. Từ đó suy ra m^2 chia hết cho $m^2 - n^2 + 1$. Từ điều trên ta suy ra tồn tại k để $m^2 = k(m^2 - n^2 + 1)$	1,4

minh n^3 nghiệm này có thể phân thành ba nhóm phân biệt có trung bình cộng bằng nhau.

a) Do $P(x)$ là một đa thức có bậc $n > 2$ với hệ số thực nên phương trình $P(x) = x$ có n nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$ (các nghiệm này có thể là nghiệm phức).

Lại do $P(x_i) = x_i \Rightarrow P(P(x_i)) = P(x_i) = x_i$ với $\forall i = \overline{1; n}$.

Vậy x_i cũng sẽ là nghiệm của phương trình $P(P(x)) = x$. Mặt khác đa thức $P(P(x))$ có bậc n^2 và phương trình $P(P(x)) = x$ có đúng n^2 nghiệm thực phân biệt nên tất cả các nghiệm của phương trình $P(P(x)) = x$ đều là nghiệm thực. Vậy $x_i \in \mathbb{R}$ với $\forall i = \overline{1; n}$.

+ Tiếp theo, ta chứng minh $x_i \neq x_j$ với $\forall i \neq j; i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Thật vậy, giả sử tồn tại $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ với $i \neq j$ thoả mãn $x_i = x_j$.

Suy ra $P(x) - x : (x - x_i)^2$. (1)

Lại có theo tính chất của đa thức với hệ số thực thì

$P(P(x)) - P(x) : P(x) - x : (x - x_i)^2$. (2)

Từ đó ta có $P(P(x)) - x : (x - x_i)^2$. Vì vậy $x = x_i$ sẽ là nghiệm kép của phương trình $P(P(x)) = x$; mâu thuẫn với khẳng định trên là phương trình

$P(P(x)) = x$ có đúng n^2 nghiệm thực phân biệt. Do đó điều giả sử là sai, suy ra $x_i \neq x_j$ với $\forall i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Vậy phương trình $P(x) = x$ có n nghiệm phân biệt.

b) Lí luận tương tự như câu (a), từ giả thiết phương trình $P(P(P(x))) = P(x)$

có n^3 nghiệm thực phân biệt cho ta phương trình $P(x) = x$ cũng có n nghiệm thực phân biệt là n nghiệm của phương trình $P(P(x)) = x$ và cũng là n

nghiệm của phương trình $P(P(P(x))) = P(x)$; rồi cũng tương tự phương trình $P(P(x)) = x$ cũng có n^2 nghiệm thực phân biệt và n^2 nghiệm thực này cũng là n^2 nghiệm thực của phương trình $P(P(P(x))) = P(x)$.

- Bây giờ ta giả sử n nghiệm thực phân biệt của phương trình $P(x) = x$ là

$x_1, x_2, \dots, x_n$. Để ý rằng $x_1, x_2, \dots, x_n$ cũng là n nghiệm của phương trình $P(x) = x$.

Đặt $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$.

- Giả sử $y_1, y_2, \dots, y_{n^2-n}$ là $n^2 - n$ nghiệm còn lại của phương trình $P(P(x)) = x$

Vậy $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{n^2-n}$ cũng là n^2 nghiệm thực phân biệt của phương trình $P(P(P(x))) = P(x)$. Gọi $z_1, z_2, \dots, z_{n^3-n^2}$ là $n^3 - n^2$ nghiệm còn lại của phương trình $P(P(P(x))) = P(x)$.

1,0

Gọi hệ số bậc cao nhất của $P(x)$ là $a \neq 0$. Do $P(x)$ có bậc n và phương trình $P(x) = x$ có đúng n nghiệm thực phân biệt thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$ nên ta có thể biểu thị

$$P(x) - x = a.x^n - a.s.x^{n-1} + Q(x) \text{ với } \deg Q(x) \leq n-2 \text{ nên}$$

$$P(x) = a.x^n - a.s.x^{n-1} + Q_1(x) \text{ với } \deg Q_1(x) \leq n-2.$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} P(P(x)) - x &= a.(a.x^n - a.s.x^{n-1} + Q_1(x))^n - a.s.(a.x^n - a.s.x^{n-1} + Q_1(x))^{n-1} \\ &\quad + Q_1(a.x^n - a.s.x^{n-1} + Q_1(x)) \\ &= a^{n+1}.x^{n^2} - a^{n+1}.s.n.x^{n^2-1} + Q_2(x) \text{ với } \deg Q_2(x) \leq n^2 - 2. \end{aligned}$$

Theo định lí Viet:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + y_1 + y_2 + \dots + y_{n^2-n} = s.n \Rightarrow y_1 + y_2 + \dots + y_{n^2-n} = s.n - s.$$

Tương tự: $P(P(P(x))) - P(x) = a^{n^2+n+1}.x^{n^3} - a^{n^2+n+1}.s.n^2.x^{n^3-1} + Q_3(x)$ với $\deg Q_3(x) \leq n^3 - 2$.

Theo định lí Viet và các chứng minh trên ta cũng có:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_{n^3-n^2} = s.n^2 - s.n.$$

Do đó tập nghiệm của $P(P(P(x))) = P(x)$ là

$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{n^2-n}, z_1, z_2, \dots, z_{n^3-n^2}$ được phân thành ba tập phân biệt:

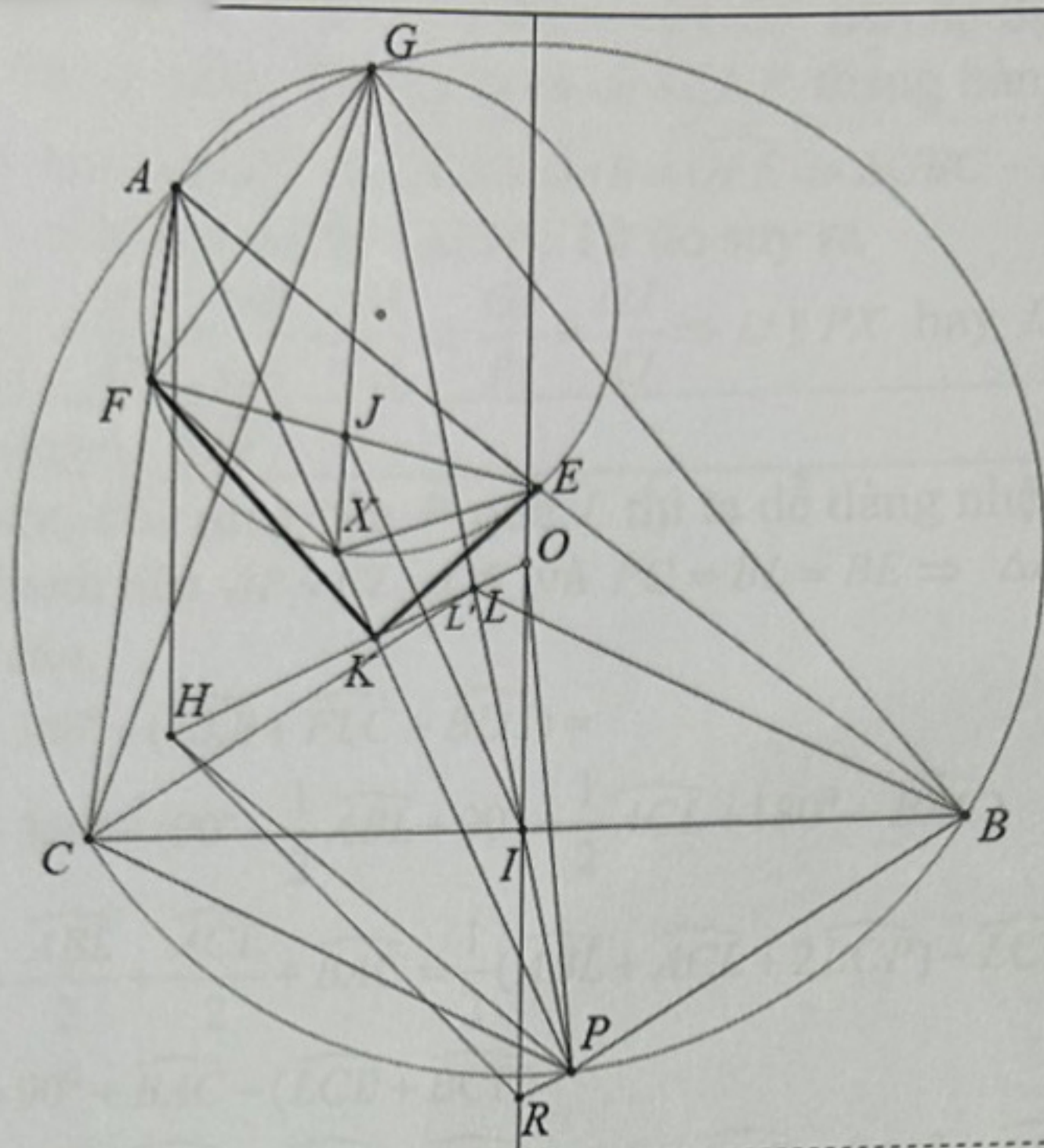
$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}; \{y_1, y_2, \dots, y_{n^2-n}\}; \{z_1, z_2, \dots, z_{n^3-n^2}\}$ mà trung bình cộng các số của mỗi

$$\text{tập: } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{s}{n}; \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{n^2-n}}{n^2 - n} = \frac{s.n - s}{n^2 - n} = \frac{s}{n} \text{ và}$$

$$\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_{n^3-n^2}}{n^3 - n^2} = \frac{s.n^2 - s.n}{n^3 - n^2} = \frac{s}{n}.$$

Vậy ta có được điều phải chứng minh.

1,0



Bổ đề : Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có I là trung điểm của BD , khi đó A, I, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{AD}{AB} = \frac{CB}{CD}$.

Chứng minh :

Nếu A, I, C thẳng hàng :

$$\text{Ta có } \triangle AID \sim \triangle BIC \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{DI}{CI} = \frac{BI}{CI}$$

$$\text{Mặt khác } \triangle AIB \sim \triangle DIC \Rightarrow \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{CD}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ngược lại : Nếu $\frac{AD}{AB} = \frac{CB}{CD}$. Gọi J là

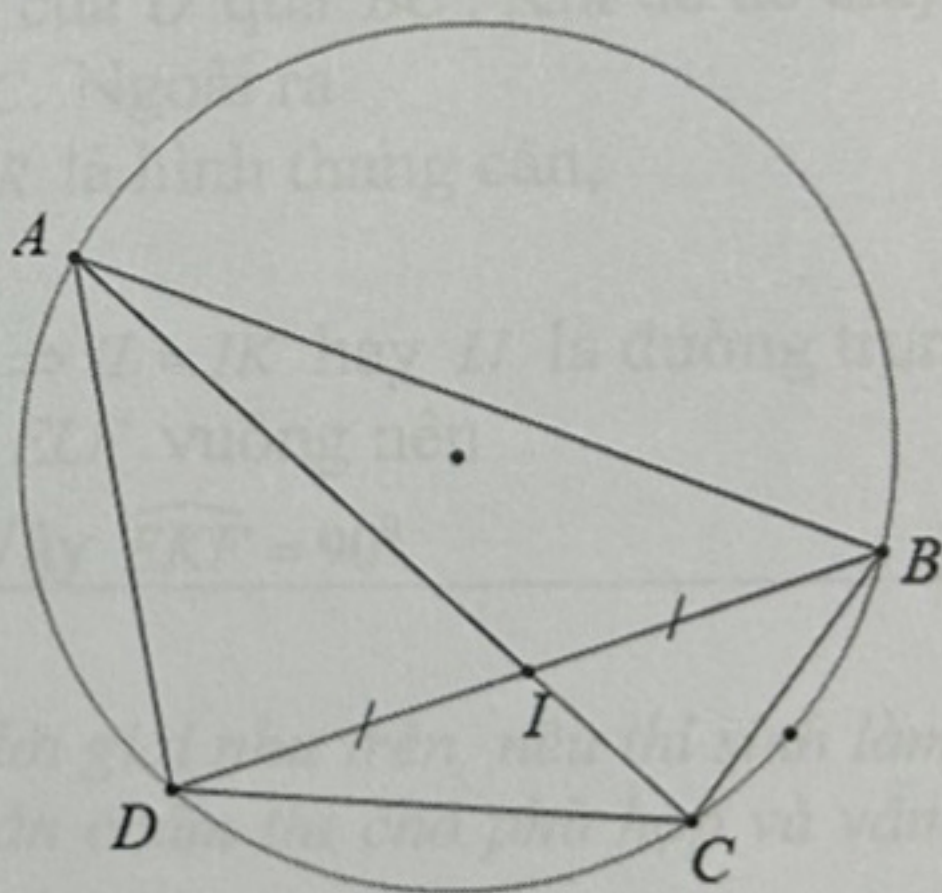
giao điểm của AC và BD . Ta có

$$\triangle AJD \sim \triangle BJC \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{DJ}{CJ}.. \text{ Mà } \triangle AJB \sim \triangle DJC \Rightarrow \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{CD}.$$

Từ giả thiết suy ra : $JB = JC \Rightarrow J$ là trung điểm BD . (đpcm).

a) Dễ thấy $P \in (O)$. Đặt $G = (AEF) \cap (ABC)$ và $X = AP \cap (AEF)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, EF .

Ta có : $\widehat{XEF} = \widehat{XAF} = \widehat{PAC} = \widehat{PBC}$. và $\widehat{BCP} = \widehat{BAP} = \widehat{EAX} = \widehat{EFX}$. suy ra



$$\Delta EFX \sim \Delta BCP \Rightarrow \frac{XF}{XE} = \frac{PC}{PB} \quad (1).$$

Lại có : $\widehat{GBE} = \widehat{GBA} = \widehat{GCA} = \widehat{GCF}$ và $\widehat{GFC} = \widehat{GFE} + \widehat{EFC} = \widehat{GAE} + \widehat{AGE} = \widehat{GEB}$
 nên $\Delta GBE \sim \Delta GCF \Rightarrow \frac{GE}{GF} = \frac{BE}{CF} \quad (2).$

Từ giả thiết : $PC = BE, PB = CF$ nên từ (1) và (2) suy ra $\frac{XF}{XE} = \frac{GE}{GF}$. Mà tứ giác $GEXF$ nội tiếp và J là trung điểm của EF nên áp dụng bổ đề trên ta được G, J, X thẳng hàng. Tương tự ta có G, I, P thẳng hàng.

Ta có : $\widehat{BGC} = \widehat{BAC} = \widehat{EGF}$ và $\widehat{GCB} = \widehat{GAB} = \widehat{GFE} \Rightarrow \Delta GBC \sim \Delta GEF$

Lại do $\Delta EFX \sim \Delta BCP \Rightarrow \Delta FJX \sim \Delta CIP$. Từ đó suy ra

$$\frac{PI}{XJ} = \frac{CI}{FJ} = \frac{2CI}{2FJ} = \frac{BC}{EF} = \frac{GB}{GE} = \frac{GI}{GJ} \Rightarrow \frac{GI}{PI} = \frac{GJ}{XJ} \Rightarrow IJ \parallel PX \text{ hay } IJ \parallel AP.$$

b) Tính số đo góc $\widehat{EKF}$.

Gọi L là điểm đối xứng của P qua I thì ta dễ dàng nhận thấy : $BLCP$ là hình bình hành nên $BP = CL = CF$ và $PC = BL = BE \Rightarrow \Delta BEL$ và ΔCFL là các tam giác cân.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \widehat{ELF} &= 360^\circ - (\widehat{ELB} + \widehat{FLC} + \widehat{BLC}) = \\ &= 360^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ABL} + 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ACL} + 180^\circ - \widehat{BAC}) \\ &= \frac{\widehat{ABL}}{2} + \frac{\widehat{ACL}}{2} + \widehat{BAC} = \frac{1}{2}(\widehat{ABL} + \widehat{ACL} + 2\widehat{LCP}) - \widehat{LCP} + \widehat{BAC} \\ &= 90^\circ + \widehat{BAC} - (\widehat{LCB} + \widehat{BCP}) \\ &= 90^\circ + \widehat{BAC} - (\widehat{CBP} + \widehat{BCP}) = 90^\circ + \widehat{BAC} - (180^\circ - \widehat{BPC}) = 90^\circ. \end{aligned}$$

Gọi $L' = PG \cap OH$ và R là điểm đối xứng của O qua BC . Khi đó dễ thấy R là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔBHC . Ngoài ra $OR = AH = HP, OP = OC = HR$, suy ra $HOPR$ là hình thang cân, $\Rightarrow PR \parallel OH \Rightarrow IL' = IP \Rightarrow L \equiv L' \Rightarrow L \in OH$.

Cuối cùng, do ΔLKP vuông và có $IL = IP \Rightarrow IL = IK$ hay IJ là đường trung trực của KL suy ra $JK = JL$, mà tam giác ELF vuông nên

$$JE = JF = JL = JK \Rightarrow \Delta EKF \text{ vuông tại } K. \text{ Vậy } \widehat{EKF} = 90^\circ.$$

Chú ý rằng $m^2 = \left(\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2}\right)^2$ và $m^2 - n^2 + 1 = 4 \cdot \frac{m+n}{2} \cdot \frac{m-n}{2} + 1$.

Do m và n là các số nguyên dương lẻ, lại có $m > n$ nên $\frac{m+n}{2}; \frac{m-n}{2}$ là các số

nguyên dương. Đặt $x = \frac{m+n}{2}; y = \frac{m-n}{2}$ ta được $(x+y)^2 = k(4xy+1)$.

Áp dụng bổ đề trên, ta có k là số chính phương.

Từ đó $m^2 - n^2 + 1 = 4xy + 1$ cũng là số chính phương. Vì $m^2 - n^2 + 1$ chia hết cho 39 nên $m^2 - n^2 + 1$ chia hết cho 39^2 (đpcm).

b) Gọi d là công sai của cấp số cộng.

Ta có $a_{i+1} - a_i = d$ với mọi $1 \leq i \leq p-1$.

Do d không chia hết cho p nên các số a_i có số dư khi chia cho p đôi một khác nhau. (Hay $a_1, a_2, \dots, a_p$ lập thành một hệ thặng dư đầy đủ theo modulo p).

Suy ra tồn tại $k \in \{1; 2; \dots; p\}$ mà $a_k \vdots p$, các số a_i còn lại với

$i \in \{1; 2; \dots; p\}; i \neq k$ có số dư khi chia cho p là $1; 2; \dots; p-1$ theo một thứ tự nào đó.

Xét tích các số này ta có $\frac{a_1 a_2 \dots a_p}{a_k} \equiv 1.2 \dots (p-1) \equiv (p-1)! \pmod{p}$. Mặt khác do

p nguyên tố nên ta có định lý Wilson: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Từ đó ta có $\frac{a_1 a_2 \dots a_p}{a_k} \equiv -1 \pmod{p}$ hay $\frac{a_1 a_2 \dots a_p}{a_k} + 1 \vdots p$.

Lại do $a_k \vdots p$ nên suy ra $a_1 a_2 \dots a_p + a_k$ chia hết cho p^2 .