

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2020 – 2021**

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (4,0 điểm)

- a) Tính giá trị của biểu thức $B = (10x^2 - 30x + 11)^{2020} + \frac{(2x^2 - 6x + 3)^{2021}}{x^5 - 3x^4 + x^3 - 1}$ khi $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$
- b) Tìm các cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn $x^2 - (2y + 3)x - y + 1 = 0$

Câu 2. (4,0 điểm)

- a) Giải phương trình $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$
- b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm M, N là hai điểm phân biệt di động lần lượt trên trục hoành và trục tung sao cho đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định I(1;2). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$.

Câu 3. (4,0 điểm)

- a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65 \\ x^2y + xy^2 = 20 \end{cases}$
- b) Một nhóm học sinh được giao sắp xếp 810 quyển sách vào tủ ở thư viện trong một thời gian nhất định. Khi bắt đầu làm việc, nhóm được bổ sung thêm học sinh nên mỗi giờ nhóm sắp xếp nhiều hơn dự định 110 quyển sách. Vì vậy không những hoàn thành trước dự định 1 giờ 30 phút mà còn vượt mức được giao 60 quyển sách. Hỏi số quyển sách mỗi giờ nhóm dự định sắp xếp là bao nhiêu?

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{AB \cdot \sin C} + \sqrt{BC \cdot \sin A} + \sqrt{CA \cdot \sin B} = \sqrt{(AB + BC + CA)(\sin A + \sin B + \sin C)}$$

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho đường tròn (O;R) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy E là điểm bất kỳ nằm trên cung nhỏ AD (E không trùng với A và D). Đường thẳng EC cắt OA tại M, đường thẳng EB cắt OD tại N.

- a) Chứng minh rằng: $AM \cdot ED = \sqrt{2} \cdot OM \cdot AE$
- b) Xác định vị trí của điểm E để tổng $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{DN}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \left(3 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \left(3 + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right).$$

.....HẾT.....

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – HÙNG YÊN (2020 – 2021)

Câu 1.

a) Ta có: $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow (2x-3)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

Lại có:

$$10x^2 - 30x + 11 = 10(x^2 - 3x + 1) + 1 = 1$$

$$2x^2 - 6x + 3 = 2(x^2 - 3x + 1) + 1 = 1$$

$$x^5 - 3x^4 + x^3 - 1 = x^3(x^2 - 3x + 1) - 1 = -1$$

Suy ra: B=0

b) Ta có: $x^2 - (2y+3)x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = y(2x+1) \quad (1)$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $2x+1 \neq 0$, do vậy:

$$(1) \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x+1} \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{7}{4} + \frac{11}{4(2x+1)}$$

$$\Rightarrow 4y = (2x-7) + \frac{11}{2x+1} \quad (2)$$

Vì x, y là các số nguyên nên 4y và 2x-7 cũng là số nguyên.

Do vậy, từ (2) suy ra $11 : (2x+1) \Leftrightarrow 2x+1 \in U(11) \Leftrightarrow 2x+1 \in \{-11, 1, -1, 11\} \Leftrightarrow x \in \{-6, -1, 0, 5\}$

Thay $x \in \{-6, -1, 0, 5\}$ vào phương trình (1) ta được:

$$(x; y) = \{(-6; -5); (-1; -5); (0; 1); (5; 1)\} \text{ (thỏa mãn (x;y) nguyên)}$$

Vậy $(x; y) = \{(-6; -5); (-1; -5); (0; 1); (5; 1)\}.$

Câu 2.

a. Điều kiện $x \geq 1$

Ta có:

$$x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1})^2 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

Đặt $x + \sqrt{x-1} = y$ (Điều kiện $y \geq 1$)

Suy ra $y^2 - 2y - 3 = 0$. Giải ra ta được $y = -1, y = 3$

Với $y = -1$ (loại)

Với $y = 3$. Thay số ta có:

$$x + \sqrt{x-1} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x-1 = 9 - 6x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x = 2, x = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm $x = 2$

b. Đặt $m = x_m, n = y_n, m, n \neq 0; m \neq 1; n \neq 2$ (1).

Gọi đường thẳng đi qua 3 điểm M, I, N có dạng $y = ax + b, a \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} am + b = 0 \\ a + b = 2 \\ b = n \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2m + n = mn \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)^2 = 5 \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) - \left(\frac{2}{m} - \frac{1}{n}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 \leq 5 \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow P = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{5}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{2}{m} = \frac{1}{n}$. Kết hợp (2) suy ra: $m = 5, n = 2, 5$ (thỏa mãn (1))

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{5}$.

Câu 3.

a) Hệ phương trình tương đương:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 65 \\ 3x^2y + 3xy^2 = 60 \end{cases}$$

Suy ra: $x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 125 \Leftrightarrow x + y = 5$

Dễ dàng suy ra: $xy = 4$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: (4;1), (1;4)

b) Gọi số quyển sách mỗi giờ nhóm dự định sắp xếp là: x quyển ($x \in N^*$)

Số quyển sách mỗi giờ thực tế sắp xếp là: x+110 (quyển)

Thời gian dự định để sắp xếp 810 quyển sách là: $\frac{810}{x}$ (h)

Tổng số quyển sách đã được sắp xếp trong thực tế là: 810+60=870 (quyển)

Thời gian thực tế để sắp xếp 870 quyển sách là: $\frac{870}{x+110}$ (h)

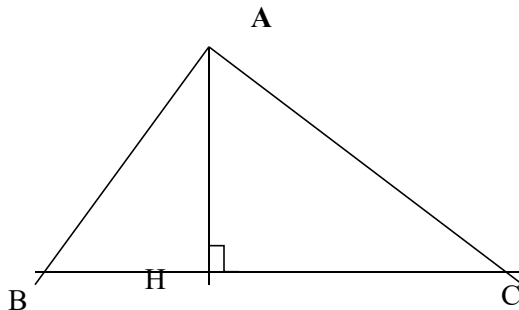
Do công việc hoàn thành trước dự định 1 giờ 30 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{810}{x} - \frac{870}{x+110} = 1,5$$

Suy ra: x=180 (thỏa mãn) hoặc x=-330 (loại).

Vậy số quyển sách mỗi giờ nhóm dự định sắp xếp là 180 quyển.

Câu 4.



Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AB}{\frac{AH}{AC}} = \frac{AB.AC}{AH} = \frac{AB.AC.BC}{AH.BC} = \frac{AB.AC.BC}{2S_{ABC}}$$

$$\text{Đặt } \frac{AB.AC.BC}{2S_{ABC}} = k \quad (k>0) \Rightarrow AB = k \sin C$$

Tương tự, suy ra: $AC = k \sin B$; $BC = k \sin A$

$$\begin{aligned} & \sqrt{AB \sin C} + \sqrt{BC \sin A} + \sqrt{CA \sin B} \\ &= \sqrt{k \sin^2 C} + \sqrt{k \sin^2 A} + \sqrt{k \sin^2 B} \\ &= k(\sin A + \sin B + \sin C) \end{aligned}$$

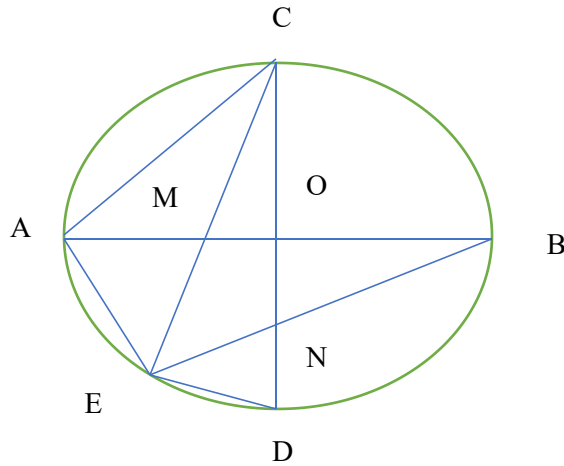
Lại có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(AB + BC + CA)(\sin A + \sin B + \sin C)} \\ &= \sqrt{(k \sin A + k \sin B + k \sin C)(\sin A + \sin B + \sin C)} \\ &= \sqrt{k}(\sin A + \sin B + \sin C) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\sqrt{AB \sin C} + \sqrt{BC \sin A} + \sqrt{CA \sin B} = \sqrt{(AB + BC + CA)(\sin A + \sin B + \sin C)}$$

Câu 5.



a) Xét $\triangle COM$ và $\triangle CED$, ta có: $\widehat{COM} = \widehat{CED} = 90^\circ$, $\widehat{ECD}$ chung.

$$\Rightarrow \triangle COM \sim \triangle CED \Rightarrow \frac{CO}{CE} = \frac{OM}{ED} \quad (1)$$

Do AB, CD là 2 đường kính vuông góc với nhau nên: $\widehat{CEA} = \widehat{CAB} = 45^\circ$

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ECA$ có: $\widehat{CEA} = \widehat{CAB} = 45^\circ$, $\widehat{ACE}$ chung.

$$\Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle EAC \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{AM}{AE}.$$

Mà $AC = \sqrt{2}CO$ (Do $\triangle ACO$ vuông cân tại O)

$$\text{Kết hợp với (1) suy ra: } \frac{AM}{AE} = \frac{\sqrt{2}CO}{CE} = \frac{\sqrt{2}OM}{ED}$$

$$\Rightarrow AM \cdot ED = \sqrt{2} OM \cdot AE \text{ (ĐPCM)}$$

b) Tương tự câu a), ta có:

$$\frac{ED}{AE} = \frac{\sqrt{2} OM}{AM} \text{ (2)}, \frac{EA}{DE} = \frac{\sqrt{2} ON}{DN} \text{ (3)}$$

Nhân theo vế của (2) và (3), suy ra: $\frac{OM}{AM} \cdot \frac{ON}{DN} = \frac{1}{2}$

Ta có: $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{DN} \geq 2\sqrt{\frac{OM}{AM} \cdot \frac{ON}{DN}} = \sqrt{2}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{OM}{AM} = \frac{ON}{DN} \Leftrightarrow \frac{ED}{\sqrt{2}EA} = \frac{EA}{\sqrt{2}ED} \Leftrightarrow ED = EA$, E là điểm chính giữa cung nhỏ AD.

GTNN của $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{DN}$ là $\sqrt{2}$, đạt khi E là điểm chính giữa cung nhỏ AD.

Vậy E là điểm chính giữa cung nhỏ AD (thỏa mãn bài toán).

Câu 6. Đặt $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = x; \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = y; \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = z \Rightarrow x, y, z > 0$.

Do đó: $P = (3+x)(3+y)(3+z) = 27 + 3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) + xyz$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $P \geq 27 + 9\sqrt[3]{(xyz)^3} + 27\sqrt[3]{xyz} + xyz \text{ (*)}$

Mà: $xyz = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \geq \frac{8}{abc}$

Mặt khác: $\frac{3}{2} \geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow \frac{8}{abc} \geq 64 \Rightarrow xyz \geq 64$

Từ (*) suy ra: $P \geq 343$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = \frac{1}{2}$

Vậy $\text{Min}P=343$, dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.