

I. Hướng dẫn chung

1. Cán bộ chấm thi chấm đúng như đáp án - thang điểm
2. Nếu có câu nào, ý nào mà thí sinh có cách giải khác so với đáp án nhưng vẫn đúng thì vẫn cho điểm tối đa của câu, ý đó theo thang điểm.
3. Nếu câu 2 thí sinh không vẽ hình thì không cho điểm. Học sinh vẽ hình sai bắt đầu từ nội dung nào thì không tính điểm từ nội dung đó.

II. Đáp án - thang điểm

Câu 1a (3 điểm). Cho (a_n) là dãy số thực. Sắp xếp các số hạng của dãy (a_n) theo bảng sau:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & & & & & & \\ a_2 & a_3 & & & & & \\ a_4 & a_5 & a_6 & & & & \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

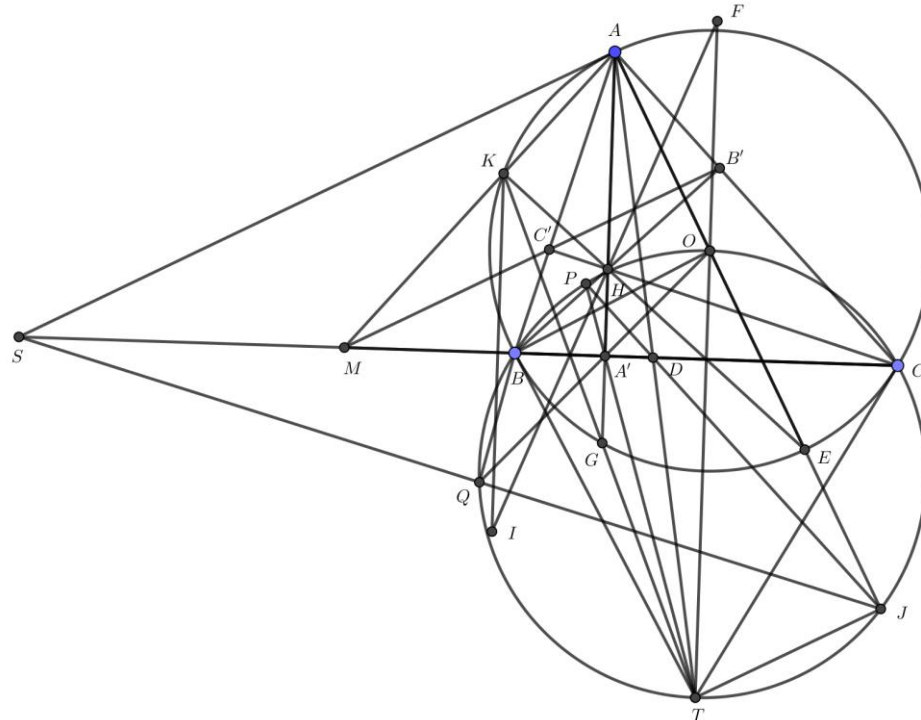
Dãy (b_n) được xác định bởi các số hạng $b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_4, b_4 = a_7, \dots$ trong đó $b_1 = a_1 = 1$. Giả sử tổng $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$ thoả mãn $\frac{2b_n}{b_n S_n - S_n^2} = 1, \forall n \geq 2$. Tìm số hạng tổng quát của dãy (b_n)

Nội dung	Điểm
Với $n \geq 2, \frac{2b_n}{b_n S_n - S_n^2} = 1 \Rightarrow \frac{2(S_n - S_{n-1})}{(S_n - S_{n-1})S_n - S_n^2} = 1$	0,25
$\Leftrightarrow \frac{2(S_n - S_{n-1})}{-S_{n-1}S_n} = 1$	0,25
$\Leftrightarrow \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = \frac{1}{2}$	0,25
Ta có $S_1 = b_1 = a_1 = 1$. Do đó dãy $\left(\frac{1}{S_n}\right)$ là một cấp số cộng với công sai bằng $\frac{1}{2}$	0,25
Vì vậy $\frac{1}{S_n} = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}(n+1)$	0,5
$\Rightarrow S_n = \frac{2}{n+1}, \forall n \geq 1$	0,5
Suy ra $b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}$.	0,5
Do đó $b_n = -\frac{2}{n(n+1)}, \forall n \geq 2$.	0,5

Câu 1b (2 điểm). Biết rằng ở bảng trên bắt đầu từ dòng thứ 3, mỗi dòng (tính từ trái sang phải) đều là một cấp số nhân với công bội dương và công bội ở tất cả các cấp số nhân đó bằng nhau. Tính tổng tất cả các số hạng của dòng thứ 2022 nếu $a_{83} = -\frac{16}{91}$

Nội dung	Điểm
Giả sử bắt đầu từ dòng thứ 3, mỗi dòng là một cấp số nhân với công bội $q > 0$. Ta có tổng số các số hạng từ dòng thứ nhất đến hết dòng thứ 12 của dãy (a_n) trong bảng trên là $1+2+\dots+12=78$.	0,5
Vì vậy a_{83} nằm ở dòng thứ 13 và cột thứ 5.	0,25
Do đó $a_{83} = b_{13} \cdot q^4 = -\frac{16}{91}$	0,25
$\Rightarrow q^4 = \frac{16}{91} \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} = 16 \Rightarrow q = 2$.	0,25
$\Rightarrow q = 2$.	0,25
Do đó tổng các số hạng ở dòng thứ 2022 là $S = b_{2022} \frac{1-q^{2022}}{1-q}$	0,25
$= \frac{2(1-2^{2022})}{2022 \cdot 2023}$	0,25

Câu 2a (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn O . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , với các đường cao AA', BB', CC' ($A' \in BC, B' \in AC, C' \in AB$) và AE là đường kính của O . Tia EH cắt lại O ở K và I là điểm đối xứng với K qua BC . Ký hiệu (ω) là đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC . Kẻ đường kính OT của (ω) . Gọi F là điểm đối xứng của T qua BC . Chứng minh rằng các đường thẳng $AK, B'C', BC$ đồng quy và I, H, F thẳng hàng.

Nội dung	Điểm
	

Giả sử $B'C'$ và BC cắt nhau ở M . Vì $\angle AKE = 90^\circ$ nên K cũng thuộc đường tròn $(AB'C')$.	0,25
Giả sử MA cắt lại O tại điểm thứ hai K' thì $MK'.MA = MB.MC = MB'.MC'$.	0,25
Từ đó tứ giác $K'C'B'A$ nội tiếp.	0,25
Do đó $K' \equiv K$ suy ra $K \in AM$ hay $AK, B'C', BC$ đồng quy.	0,25
Do $\angle OBT = \angle OCT = 90^\circ$ nên T là giao hai tiếp tuyến tại B, C của O	0,25
Gọi AA' cắt O ở G thì G, H đối xứng nhau qua BC .	0,25
Ta có $(MA', BC) = -1$ nên $A(MA', BC) = -1$.	0,25
Từ đó suy ra $KBGC$ là tứ giác điều hòa nên KG sẽ đi qua T .	0,25
Xét phép đối xứng trục BC thì K, I và H, G lần lượt đối xứng nhau qua BC	0,5
nên IH sẽ đi qua điểm F . Do đó I, H, F thẳng hàng.	0,5

Câu 2b (2 điểm) Gọi J là giao điểm của AE với (ω) và tia TA' cắt lại (ω) ở P . Chứng minh rằng các đường thẳng JP, BC, AT đồng quy.

Nội dung	Điểm
Giả sử OA' cắt lại (ω) tại Q , tiếp tuyến qua A của (O) cắt BC tại S thì $AS \perp TJ$ (vì cùng vuông góc với AO). Do đó $\angle SAA' = \angle OTJ$.	0,25
Ta có $\angle BQA' = \angle BQO = \angle OCB = \angle OBC$ nên OB là tiếp tuyến của $(A'BQ) \Rightarrow OA'.OQ = OB^2 = OA^2$ kéo theo OA là tiếp tuyến của $(AA'Q)$.	0,25
Vì $\angle OAS = 90^\circ, \angle AA'S = 90^\circ$ nên OA tiếp xúc với $(AA'S)$, suy ra $\angle ASA' = \angle OAA'$ mà $\angle AQA' = \angle OAA'$ (do (AQA') tiếp xúc OA) hay $\angle ASA' = \angle AQA'$ tức là A, A', Q, S đồng viên.	0,25
Suy ra $\angle SQA' = 180^\circ - \angle SAA' = 180^\circ - \angle OTJ = 180^\circ - \angle OQJ$ nên S, Q, J thẳng hàng.	0,25
Gọi D là giao điểm của AT, BC ; vì AD là đường đối trung nên ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.	0,25
Lại có $\triangle SAB \sim \triangle SCA$ (g.g) nên $\frac{SB}{SC} = \frac{SA}{SC} \cdot \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{DB}{DC}$, mà D nằm trong đoạn BC còn S nằm ngoài đoạn BC nên $(SD, BC) = -1$.	0,25
Do $OB = OC, TB = TC$ nên PA', QA' là các phân giác của góc $\angle BPC, \angle BQC$. Suy ra $\frac{PB}{PC} = \frac{A'B}{A'C} = \frac{QB}{QC}$ dẫn đến $QBPC$ là tứ giác điều hòa. Từ đó $\angle(QP, BC) = -1$, mà JQ đi qua S nên JP sẽ đi qua D' trên BC sao cho $(SD', BC) = -1$.	0,25
Theo trên ta có $(SD, BC) = -1$ nên $D \equiv D'$, tức là J, D, P thẳng hàng hay các đường thẳng JP, BC, AT là đồng quy.	0,25

Câu 3a (2 điểm). Xét hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x) - y^2) = f(x^2) + y^2 f(y) - 2f(xy), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$.

Nội dung	Điểm
$f(f(x) - y^2) = f(x^2) + y^2 f(y) - 2f(xy) \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1). Kí hiệu $P(u, v)$ nghĩa là thay x bởi u và thay y bởi v trong (1) Với $P(x, 1) \Rightarrow f(f(x) - 1) = f(x^2) + f(1) - 2f(x)$ (2).	0,5
Với $P(x, -1) \Rightarrow f(f(x) - 1) = f(x^2) + f(-1) - 2f(-x)$ (3).	0,5

Từ (2) và (3) suy ra $f(1) - 2f(x) = f(-1) - 2f(-x), \forall x \in \mathbb{Q}$.	0,5
Cho $x=1$ thì $f(1) = f(-1)$, vì vậy $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{Q}$ Do đó $f(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{Q}$.	0,5

Câu 3b (2 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện trên.

Nội dung	Điểm
Với $P(1,1) \Rightarrow f(f(1)-1)=0$, do đó tồn tại số thực b sao cho $f(b)=0$.	0,25
Thay $x=b$ vào (3) ta được $f(f(b)-1)=f(b^2)+f(1) \Rightarrow f(-1)=f(b^2)+f(1) \Rightarrow f(b^2)=0$.	0,25
Với $P(b,0) \Rightarrow f(f(b))=f(b^2)-2f(0) \Rightarrow 3f(0)=f(b^2)=0$.	0,25
Với $P(0,y) \Rightarrow f(y^2)=y^2 f(y)$ (4).	0,25
Ta có hai trường hợp sau: Trường hợp 1: Tồn tại $b \in \mathbb{Q}, b \neq 0$ sao cho $f(b)=0$. Như trên, ta có $f(b^2)=0$. $P(b,y) \Rightarrow f(f(b)-y^2)=f(b^2)+y^2 f(y)-2f(by) \Rightarrow f(y^2)=y^2 f(y)-2f(by)$	0,25
Kết hợp với (4) và $b \in \mathbb{Q}, b \neq 0$ nên ta có $f(x)=0, \forall x \in \mathbb{Q}$.	0,25
Trường hợp 2: $f(b)=0 \Leftrightarrow b=0$. $P(x,x) \Rightarrow f(f(x)-x^2)=f(x^2)+x^2 f(x)-2f(x^2)=x^2 f(x)-f(x^2)=0$ $\Rightarrow f(x)-x^2=0 \Rightarrow f(x)=x^2, \forall x \in \mathbb{Q}$.	0,25
Thử lại, dễ thấy $f(x)=0, \forall x \in \mathbb{Q}; f(x)=x^2, \forall x \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn.	0,25

Câu 4 (3 điểm). Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $2^x + 1 = x^2 y$.

Nội dung	Điểm
Nếu $x=1$ thì có $y=3$	0,25
Xét $x>1$, ta có x, y lẻ	0,25
Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của x . Ta có $2^{2x} \equiv 1 \pmod{p}$	0,25
Theo định lý Fermat nhỏ thì $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ Đặt $h = \text{ord}_p(2) \Rightarrow \begin{cases} h \mid (p-1) \\ h \mid (2x) \end{cases} \Rightarrow h \mid \gcd(2x, p-1) = 2$	0,25
Nếu $h=1 \Rightarrow 2 \equiv 1 \pmod{p}$ (vô lý). Suy ra $h=2 \Rightarrow 2^2 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow p=3$	0,25
Đặt $x=3^k a, k \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{N}^*, \gcd(a,3)=1$ Ta có $v_3(2^x + 1) = v_3(2^{3^k a} + 1) = v_3(2+1) + k = k+1 \geq v_3(x^2) = 2k$. Suy ra $k=1$, do đó $x=3a$.	0,25
Giả sử $a>1 \Rightarrow a \geq 5$ (vì a lẻ do x lẻ, mà $\gcd(a,3)=1$ nên $a>3$) Gọi q là ước nguyên tố nhỏ nhất của a . Ta có $8^a \equiv -1 \pmod{q}$	0,25
Đặt $m = \text{ord}_q(8)$ Bằng cách chứng minh tương tự ta có $m \mid 2$.	0,25
Nếu $m=1 \Rightarrow 8 \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow q=7$	0,25
Nếu $m=2$ thì $8^2 \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow q=7$	0,25

Nhưng với $q = 7$ ta có $8^a + 1 \equiv 2 \pmod{7} \Leftrightarrow 8^a \equiv 1 \pmod{7}$ (mâu thuẫn)	0,25
Vậy $a = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 1$.	0,25
Do đó $(x; y) = (1; 3)$ hoặc $(x; y) = (3; 1)$	

Câu 5a (1 điểm). Câu lạc bộ Toán học của một trường THPT có n thành viên, trong năm 2022 họ đã tổ chức 12 buổi seminar, mỗi buổi có 24 thành viên tham gia. Biết rằng hai thành viên bất kì tham gia chung không quá một buổi. Chứng minh $n > 81$.

Nội dung	Điểm
Đếm số bộ $(A; B; C)$ với $A; B$ là 2 học sinh tham gia vào buổi seminar C . + Đếm theo buổi: Chọn một buổi chuyên đề có 12 cách Chọn 2 học sinh có C_{24}^2 cách Do đó số bộ $(A; B; C)$ là $12C_{24}^2$	0,25
+ Đếm theo học sinh: Chọn hai học sinh có C_n^2 cách. Mặt khác có không quá 1 buổi cho hai học sinh này do đó số bộ không quá C_n^2 .	0,25
Từ đó ta có $12C_{24}^2 \leq C_n^2 \Leftrightarrow n^2 - n \geq 6624 \Rightarrow n > 81$.	0,5

Câu 5b (2 điểm). Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Nội dung	Điểm
Nhận xét: hai thành viên bất kỳ tham gia chung không quá một buổi, tương đương với hai buổi bất kỳ có chung nhau không quá một thành viên, ta đưa về đếm số bộ S có dạng $(A; B; C)$ với hai buổi $A; B$ có thành viên C tham gia chung.	0,25
+ Đếm theo buổi, ta có $S \leq C_{12}^2$.	0,25
+ Đếm theo thành viên, ta gọi $a_1, a_2, \dots, a_n$ lần lượt là số buổi mà thành viên $1, 2, 3, \dots, n$ tham gia. Bằng cách đếm số lượt tham gia, ta có $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 12 \cdot 24 = 288$.	0,25
Do đó $S = C_{a_1}^2 + C_{a_2}^2 + \dots + C_{a_n}^2 = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - 288)$	0,25
Từ hai cách đếm trên, ta suy ra $C_{12}^2 \geq \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - 288) \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \leq 420$	0,25
Với mỗi $i \in \{1; 2; \dots; n\}$ ta có $(a_i - 1)(a_i - 2) \geq 0$ tức là $a_i^2 \geq 3a_i - 2, \forall i = \overline{1, n}$	0,25
Suy ra $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq (3a_1 - 2) + (3a_2 - 2) + \dots + (3a_n - 2) = 3 \cdot 288 - 2n \Rightarrow n \geq 222$.	0,25
Mặt khác, vì đẳng thức xảy ra khi có 156 số a_i bằng 1 và 66 số a_i bằng 2 nên ta kết luận giá trị nhỏ nhất cần tìm là 222.	0,25

-----Hết-----