

Ngày thi: 06/10/2023

Hướng dẫn chấm gồm 07 trang

A) Hướng dẫn chung:

- 1) Học sinh làm đúng đến đâu thì chấm đến đó. Học sinh trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo chấm tương ứng biểu điểm của HDC.
- 2) Việc chi tiết hoá thang điểm phải đảm bảo không làm sai lệch biểu điểm của HDC và phải được thống nhất trong toàn hội đồng chấm thi.
- 3) Điểm của bài thi không làm tròn.

B) Hướng dẫn cụ thể:

Bài 1 (4,0 điểm). Giải phương trình $(x^2 - 10x + 21)\sqrt{x - 3} = x^3 - 11x^2 + 34x - 27$ ($x \in \mathbb{R}$). (1)

Ý	Nội dung	Điểm
1	Điều kiện xác định: $x \geq 3$.	0,5
	$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 10x + 21)(\sqrt{x - 3} - 1) = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$	0,5
	$\Leftrightarrow (x^2 - 10x + 21)(x - 4) = (x - 2)(x - 4)(x - 6)(\sqrt{x - 3} + 1)$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \\ (x - 3)(x - 7) = (x - 2)(x - 6)(\sqrt{x - 3} + 1) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \quad (\text{thoả mãn}) \\ (x - 3)(x - 7) = (x - 2)(x - 6)(\sqrt{x - 3} + 1) \end{cases} \quad (2)$	0,5
	Xét phương trình (2): $(2) \Leftrightarrow [(x - 4) + 1][(x - 3) - 4] = [(x - 4)^2 - 4](\sqrt{x - 3} + 1).$	0,5
	Phương trình trên có nghiệm khi $\frac{9}{2} \leq x \leq 6$.	0,5
	Đặt $\begin{cases} x - 4 = u \\ \sqrt{x - 3} = v \end{cases} \quad (u, v > 0).$ Phương trình trở thành: $(u + 1)(v^2 - 4) = (v + 1)(u^2 - 4) \Leftrightarrow (v - u)(uv + u + v + 4) = 0 \Leftrightarrow u = v$	0,5

$\Rightarrow x - 4 = \sqrt{x - 3} \Rightarrow x^2 - 9x + 19 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{9 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ 4; \frac{9 + \sqrt{5}}{2} \right\}$	0,5
---	-----

Bài 2 (5,0 điểm). Cho dãy số (x_n) được xác định như sau $\begin{cases} x_1 = x_2 = a \\ x_{n+1} = x_n + 2 \cdot \frac{\sqrt{x_{n-1}}}{n^3}, \forall n \geq 2 \end{cases}$ trong đó a là một số thực dương cho trước.

- a) Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn.
- b) Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$. Tìm số thực α để dãy (y_n) xác định bởi $y_n = n^\alpha(c - x_n), \forall n \geq 1$ có giới hạn hữu hạn khác 0.

Ý	Nội dung	Điểm
2.a	Nhận thấy $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có $x_{n+1} - x_n > 0, \forall n \geq 2$, suy ra (x_n) tăng ngặt (kể từ số hạng thứ hai).	0,5
	Ta có: $x_{n+1} = x_n + 2 \cdot \frac{\sqrt{x_{n-1}}}{n^3} \leq x_n + 2 \cdot \frac{\sqrt{x_n}}{n^3} < \left(\sqrt{x_n} + \frac{1}{n^3} \right)^2, \forall n \geq 2$.	1,0
	$\Rightarrow \sqrt{x_{n+1}} < \sqrt{x_n} + \frac{1}{n^3} < \sqrt{x_n} + \frac{1}{n(n+1)}, \forall n \geq 2$ $\Rightarrow \sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 2$.	0,5
	$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (\sqrt{x_{i+1}} - \sqrt{x_i}) < \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right), \forall n \geq 2$. $\Rightarrow \sqrt{x_n} < \sqrt{x_1} + 1 - \frac{1}{n} < \sqrt{a} + 1, \forall n \geq 2$.	0,5
	Do đó (x_n) bị chặn trên. Dãy số (x_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn (điều phải chứng minh).	0,5
	Ta có: $x_n < c, \forall n \geq 1$ và $x_{m+1} - x_n = \sum_{i=n}^m (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=n}^m \frac{2\sqrt{x_{i-1}}}{i^3}, (\forall m > n \geq 1).$	0,5

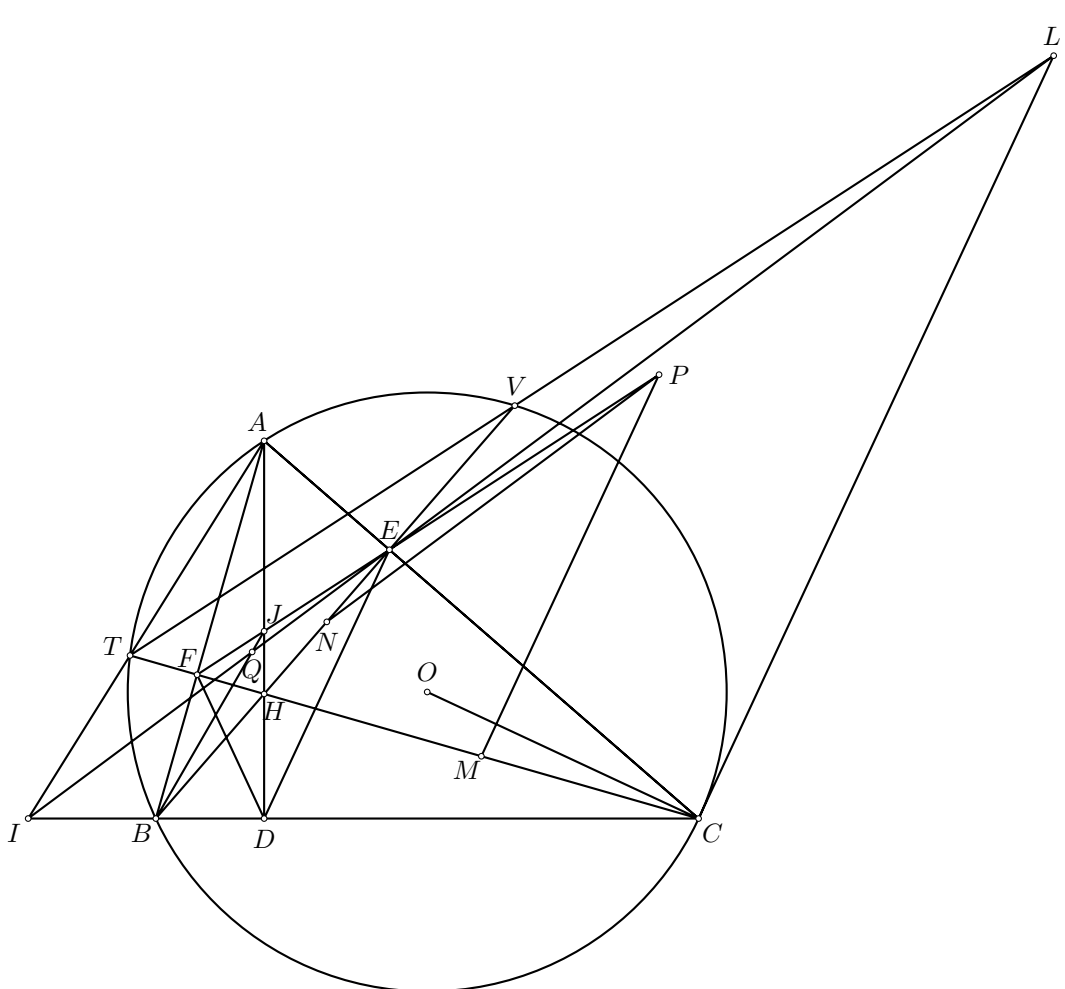
2.b	Xét hàm số $f(x) = -\frac{1}{2x^2}$ với $x \in [i; i+1]$. Khi đó tồn tại $d_i \in [i; i+1]$ sao cho $f'(d_i) = f(i+1) - f(i)$ $\Rightarrow \frac{1}{d_i^3} = f(i+1) - f(i)$ $\Rightarrow \frac{1}{(i+1)^3} \leq f(i+1) - f(i) \leq \frac{1}{i^3}$ $\Rightarrow \sum_{i=n}^m \frac{1}{i^3} \geq f(m+1) - f(n) = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(m+1)^2}$ và $\sum_{i=n}^m \frac{1}{i^3} \leq f(m) - f(n-1) = \frac{1}{2(n-1)^2} - \frac{1}{2m^2}.$	0,5
	Suy ra $\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(m+1)^2} \leq \sum_{i=n}^m \frac{1}{i^3} \leq \frac{1}{2(n-1)^2} - \frac{1}{2m^2}$. Khi đó $2\sqrt{x_{n-1}} \sum_{i=n}^m \frac{1}{i^3} \leq \sum_{i=n}^m \frac{2\sqrt{x_{i-1}}}{i^3} = x_{m+1} - x_n < 2\sqrt{c} \sum_{i=n}^m \frac{1}{i^3}$ $\Rightarrow \sqrt{x_{n-1}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) \leq x_{m+1} - x_n < \sqrt{c} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{m^2} \right).$ Cho $m \rightarrow +\infty$ ta có $\frac{\sqrt{x_{n-1}}}{n^2} \leq c - x_n \leq \frac{\sqrt{c}}{(n-1)^2} \Rightarrow n^{\alpha-2} \sqrt{x_{n-1}} \leq n^{\alpha}(c - x_n) \leq \sqrt{c} \frac{n^{\alpha}}{(n-1)^2}.$	0,5
	Nếu $\alpha > 2$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha-2} \sqrt{x_{n-1}} = +\infty$, hay $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha}(c - x_n) = +\infty$. Nếu $\alpha < 2$ thì $0 < n^{\alpha}(c - x_n) \leq \sqrt{c} \frac{n^{\alpha-2}}{(1 - \frac{1}{n})^2}$. Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{c} \frac{n^{\alpha-2}}{(1 - \frac{1}{n})^2} = 0$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha}(c - x_n) = 0$, không thoả mãn yêu cầu bài toán. Nếu $\alpha = 2$ thì $\sqrt{x_{n-1}} \leq n^2(c - x_n) \leq \sqrt{c} \frac{n^2}{(n-1)^2}$. Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{c} \frac{n^2}{(n-1)^2} = \sqrt{c}$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha}(c - x_n) = \sqrt{c}$. Vậy $\alpha = 2$ thoả mãn điều kiện bài toán.	0,5

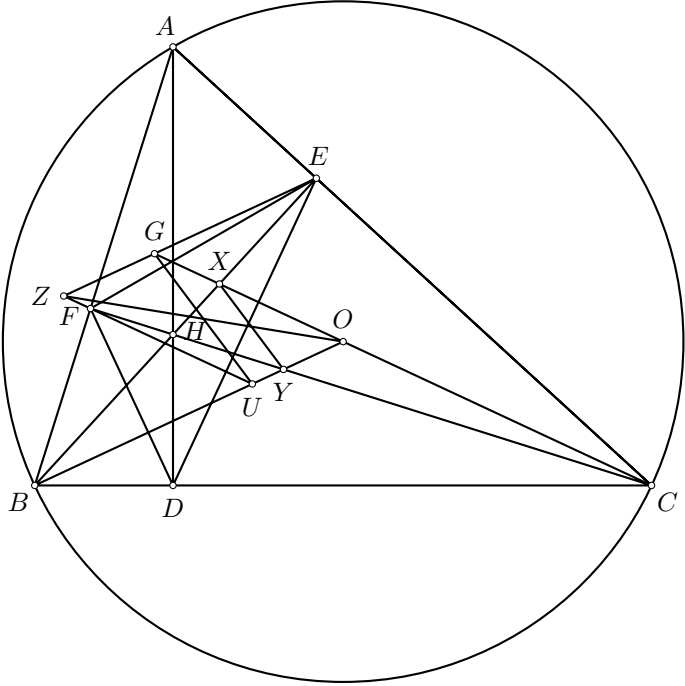
Bài 3 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Gọi T là giao điểm thứ hai của đường thẳng CH với đường tròn (O) ; I là giao điểm của AT với BC ; J là giao điểm của AD với EF . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn HC, HE . Lấy điểm P trên EF sao cho MP song

song với DE , điểm Q trên BJ sao cho EQ song song với NP .

a) Chứng minh rằng ba điểm I, E, Q thẳng hàng.

b) Gọi X là giao điểm của BH với CO , Y là giao điểm của CH với BO , Z là trực tâm tam giác DEF . Chứng minh rằng OZ chia đôi đoạn XY .

Ý	Nội dung	Điểm
3.a		
	Xét thể hình trên đây. Ta có kết quả quen thuộc $DE \perp CO$, thế nên $MP \perp OC$.	1,0
	Phép vị tự $\mathcal{H}(H, 2)$ tâm H , tỉ số 2, biến đường thẳng EF thành đường thẳng VT và biến đường thẳng MP thành tiếp tuyến tại C của (O) . Dẫn đến giao điểm L của VT và tiếp tuyến của (O) tại C là ảnh của P qua phép vị tự này.	0,5
	Suy ra $\mathcal{H}(H, 2)$ biến đường thẳng NP thành đường thẳng EL , thế nên $NP \parallel EL$. Mà $EQ \parallel NP$ nên Q, E, L thẳng hàng. (1)	0,5

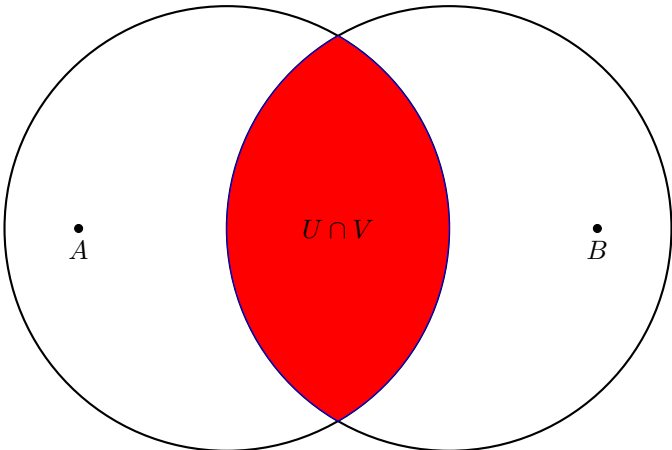
	Áp dụng định lí Pascal cho bộ 6 điểm $\begin{pmatrix} V & C & A \\ C & T & B \end{pmatrix}$ ta được I, E, L thẳng hàng. Từ (1) và (2), ta có I, Q, E thẳng hàng.	1,0
		
	Xét thể hình trên đây. Gọi $G = ZE \cap CO, U = ZF \cap BO$. Để thấy tứ giác $OGZU$ là hình bình hành nên OZ chia đôi đoạn GU. Vậy ta chỉ cần chỉ ra $GU \parallel XY$ hay $\frac{OX}{XG} = \frac{OY}{YU}$.	0.5
3.b	Theo định lí Thales, ta có $\frac{OX}{XG} = \frac{OB}{GE}, \frac{OY}{YU} = \frac{OC}{FU}$ mà $OB = OC$ nên ta cần chứng minh $GE = FU$.	0.5
	Áp dụng định lí sin trong hai tam giác BFU và CGE ta có: $\frac{FU}{GE} = \frac{FU}{BF} \cdot \frac{FB}{CE} \cdot \frac{CE}{GE} = \frac{\sin \widehat{ABO}}{\sin \widehat{BUF}} \cdot \frac{\sin \widehat{BCF}}{\sin \widehat{CBE}} \cdot \frac{\sin \widehat{CGE}}{\sin \widehat{OCA}}$	1.0
	Do BO, BH là hai đường liên hợp đẳng giác nên $\widehat{ABO} = \widehat{CBE}$. Do $UOGZ$ là hình bình hành nên $\widehat{BUF} = \widehat{CGE}$. Do CO, CH là hai đường liên hợp đẳng giác nên $\widehat{BCF} = \widehat{OCA}$. Từ đây suy ra $\frac{FU}{GE} = 1 \Rightarrow FU = GE$, điều phải chứng minh.	1,0

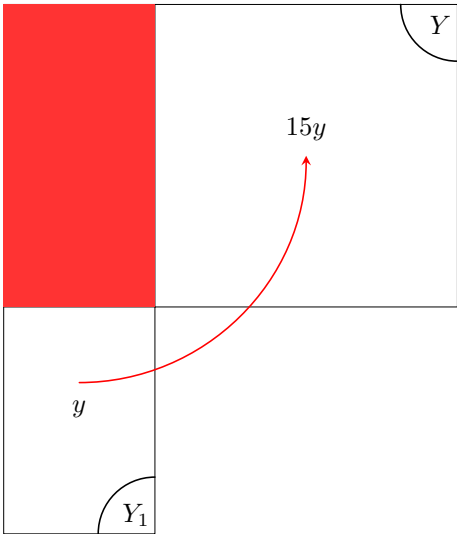
Bài 4 (5,0 điểm). Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \dots, 2048\}$.

- a) Chứng minh khẳng định sau: “Với mọi tập con X của tập S có số phần tử bằng 15, luôn tồn tại hai tập con khác rỗng rời nhau A, B của tập X sao cho $\sum_{i \in A} i = \sum_{j \in B} j$ ”.

Khẳng định này còn đúng không khi số phần tử của tập X bằng 12?

- b) Tập con Y khác rỗng của S thoả mãn điều kiện: $\forall y \in Y$ thì $15y \notin Y$. Tìm số phần tử lớn nhất có thể của tập Y .

Ý	Nội dung	Điểm
4.a	Số tập con khác rỗng của tập X là $2^{15} - 1 = 32767$	0,5
	Tổng của 15 phần tử lớn nhất của tập S là $2034 + 2035 + 2036 + \dots + 2048 = 30615.$	0,5
	Như vậy với mọi tập con X của tập S , $ X = 15$, $Y \subset X$, Y khác $\emptyset$ ta luôn có $1 \leq \sum_{i \in Y} i \leq 30615$. Áp dụng định lí Dirichlet, suy ra tồn tại hai tập con khác nhau $U, V \subset X$ sao cho $\sum_{i \in U} i = \sum_{j \in V} j$.	0,5
	Đặt $A = U \setminus (U \cap V)$ và $B = V \setminus (U \cap V)$. 	0,5
	Rõ ràng $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ và $\sum_{i \in A} i = \sum_{j \in B} j$. Bổ đề: Cho số nguyên dương $k > 1$. Mỗi số nguyên dương n đều có thể biểu diễn một cách duy nhất thành tổng $n = a_0 k^m + a_1 k^{m-1} + \dots + a_{m-1} k + a_m,$ trong đó $a_0, a_1, \dots, a_m \in \{0; 1; \dots; k-1\}$ với $a_0 \geq 1$ và m là một số nguyên không âm.	0,5

	Ta có $2^{11} = 2048$. Tính chất không còn đúng khi $X = 12$. Chẳng hạn, ta xét $X = \{1; 2; \dots; 2^{11}\}$. Nếu tồn tại hai tập con khác rỗng A, B mà $A \cap B = \emptyset$ và $\sum_{i \in A} i = \sum_{j \in B} j = n$. Suy ra n có hai biểu diễn trong hệ cơ số 2, mâu thuẫn.	0,5
	Nếu $15y > 2048$ thì $y \geq 137$. Nếu $15y < 137$ thì $y \leq 9$. Ta thấy tập $Y = \{1, 2, \dots, 9\} \cup \{137, 138, \dots, 2048\}$ thoả mãn điều kiện: $\forall y \in Y \text{ thì } 15y \notin Y.$ Khi đó $Y = 9 + 2048 - 136 = 1921$.	1,0
4.b	Nếu có một tập Y_1 thoả mãn điều kiện của bài toán có chứa phần tử $y \in \{10, 11, \dots, 136\}$. Vì $15y \in Y$ và $15y \notin Y_1$ nên $Y_1 \leq Y$  Vậy số phần tử lớn nhất của Y bằng 1921.	1,0

—HẾT—