

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN (dành cho thí sinh chuyên Toán, chuyên Tin)
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{\frac{16}{x^2} - \frac{8}{x} + 1}}$, với giá trị nào của x thì biểu

thức A xác định. Rút gọn A

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2y + 2x^2 + 3y = 15 \\ x^4 + y^2 - 2x^2 - 4y = 5 \end{cases}$$

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Cho các số a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm $x^2 + ax + 1 = 0$; $x^2 + bx + 1 = 0$; $x^2 + cx + 1 = 0$

b) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = (1 + 2a)(1 + 2b)$

Câu 3. (1,5 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n(2n+7)(7n+1)$ luôn chia hết cho 6

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $4a + 1$ và $4b - 1$ nguyên tố cùng nhau, $a + b$ là ước của $16ab + 1$

Câu 4. (3,0 điểm)

1) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, gọi I là trung điểm của đoạn OA . Vẽ tia Ix vuông góc với AB cắt nửa đường tròn (O) tại C . Lấy điểm E trên cung nhỏ BC ($E \neq B, E \neq C$), nối AE cắt CI tại F

a) Chứng minh rằng $BEFI$ là tứ giác nội tiếp

b) Gọi K là giao điểm của hai tia BE và Ix . Giả sử F là trung điểm của IC . Chứng minh rằng $\triangle AIF \sim \triangle KIB$. Tính IK theo R

2) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ABH, ACH . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK và đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng nhau.

Câu 5. (1,0 điểm)

Một bảng kích thước $2n \times 2n$ ô vuông, n là số nguyên dương. Người ta đánh dấu vào $3n$ ô bất kỳ của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng và n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trên n hàng và n cột này

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Ta có $x + 4\sqrt{x-4} = (\sqrt{x-4} + 2)^2 \geq 0$

$$x - 4\sqrt{x-4} = (\sqrt{x-4} - 2)^2 \geq 0; \frac{16}{x^2} - \frac{8}{x} + 1 = \left(\frac{4}{x} - 1\right)^2 \geq 0$$

Vậy điều kiện để A xác định là $x > 4$

$$\text{Khi đó } A = \frac{\left| \sqrt{x-4} + 2 \right| + \left| \sqrt{x-4} - 2 \right|}{\left| \frac{4-x}{x} \right|} = \frac{\sqrt{x-4} + 2 + \left| \sqrt{x-4} - 2 \right|}{\frac{x-4}{x}}$$

$$\text{Nếu } \sqrt{x-4} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 8 \text{ thì } A = \frac{x(\sqrt{x-4} + 2 + \sqrt{x-4} - 2)}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}$$

$$\text{Nếu } 0 < \sqrt{x-4} < 2 \Leftrightarrow 4 < x < 8 \text{ thì } A = \frac{x(\sqrt{x-4} + 2 - \sqrt{x-4} + 2)}{x-4} = \frac{4x}{x-4}$$

b) Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 1)(y - 2) + 4(x^2 - 1)(y - 2) = 5 \\ (x^2 - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = y - 2 \end{cases}$ Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \\ uv + 4(u + v) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u + v)^2 - 2uv = 10 \\ uv + 4(u + v) = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u + v = -10 \\ uv = 45 \end{cases} \text{ (VN)} \\ \begin{cases} u + v = 2 \\ uv = -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases} \end{cases}$$

*) $u = 3, v = -1 \Rightarrow (x; y) = \{(2; 1); (-2; 1)\}$

*) $u = -1, v = 3 \Rightarrow (x; y) = (0; 5)$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm $(2; 1); (-2; 1); (0; 5)$

Câu 2.

a) Ba phương trình trên lần lượt có $\Delta_1 = a^2 - 4; \Delta_2 = b^2 - 4; \Delta_3 = c^2 - 4$

$$\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = a^2 + b^2 + c^2 - 12 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} - 12 = \frac{36}{3} - 12 = 0$$

(Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 2$) suy ra $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \geq 0$

Do đó có ít nhất một trong ba biệt thức $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ không âm

Vậy ít nhất một trong ba phương trình trên có nghiệm.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có :

$$a^2 + \frac{4}{9} \geq \frac{4}{3}a \Rightarrow 2a \leq \frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3} \text{ và } 2bc \leq b^2 + c^2. \text{ Suy ra:}$$

$$A \leq \left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3} + 1 \right) (b^2 + c^2 + 1) = \frac{3}{2} \left(a^2 + \frac{10}{9} \right) (b^2 + c^2 + 1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\frac{3}{2} \left(a^2 + \frac{10}{9} \right) (b^2 + c^2 + 1) \leq \frac{3}{2} \left(\frac{a^2 + \frac{10}{9} + b^2 + c^2 + 1}{2} \right)^2 = \frac{98}{27} \Rightarrow A \leq \frac{98}{27}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = c \\ a^2 + \frac{10}{9} = b^2 + c^2 + 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = c = \frac{\sqrt{10}}{6} \end{cases}$$

$$\text{Vậy GTLN của biểu thức } A = \frac{98}{27} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}; b = c = \frac{\sqrt{10}}{6}$$

Câu 3.

a) Gọi $A = n(2n+7)(7n+1)$

Ta có trong hai số n và $7n+1$ phải có một số chẵn nên $n(2n+7)(7n+1)$ chia hết cho 2

Với $n \in \mathbb{Z}$, ta có 3 trường hợp sau :

$$+)n = 3k (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow A = 3k(6k+7)(21k+1):3 \quad (1)$$

$$+)n = 3k+1 (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow A = (3k+1)(6k+9)(21k+8):3 \quad (2)$$

$$+)n = 3k+2 (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow A = (3k+2)(6k+11)(21k+15):3 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $A:3, \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow A:6, \forall n \in \mathbb{Z}$

b) Giả sử (a, b) là cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán

Khi đó $(4a+1; 4b+1) = 1$ và $(16ab+1):(a+b)(1)$

Ta có: $(4a+1)(4b+1) = (16ab+1) + 4(a+b)$ chia hết cho $a+b(2)$

Ta có: $4a+1+4b-1 = 4(a+b):(a+b)$

Nếu $4a+1; a+b$ cùng chia hết cho số nguyên tố p thì $4b-1$ cũng chia hết cho p , điều này mâu thuẫn vì $(4a+1; 4b-1) = 1$

Do đó, $(4a+1; a+b) = 1 \Rightarrow (4b+1):(a+b)$

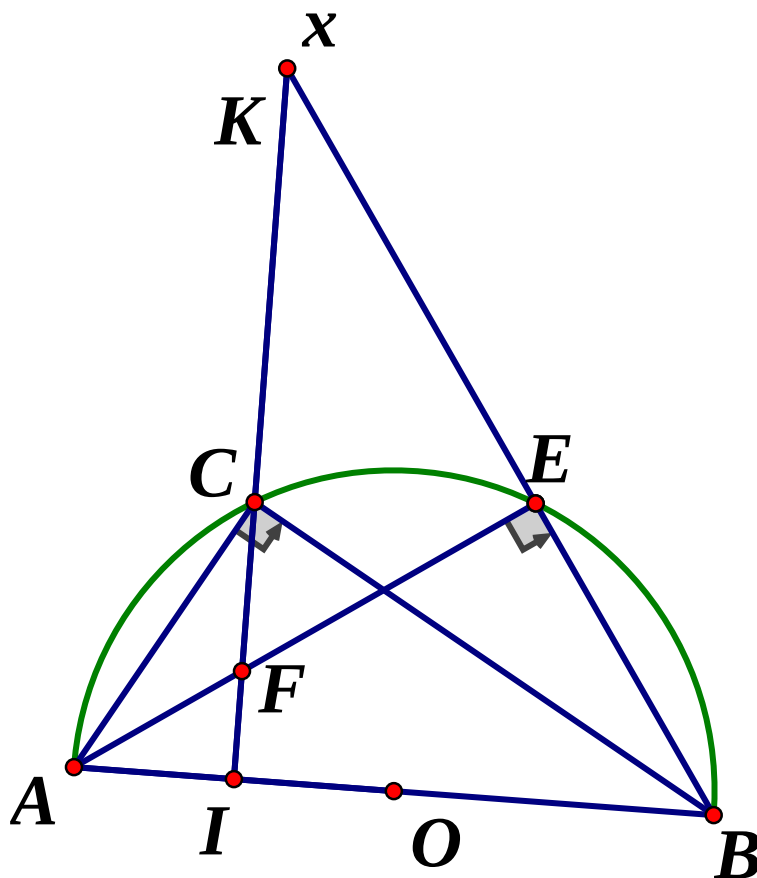
Nên từ (1) suy ra $(4b+1):(a+b)(3)$

Ngược lại, nếu (a, b) là cặp số nguyên thỏa mãn (3) thì từ (2) ta có: $(16ab+1):(a+b)$

Ta chứng minh được vì nếu hai số $4a+1$ và $4b-1$ cùng chia hết cho số nguyên tố p thì p là số nguyên tố lẻ.

Câu 4.

1)



a) Ta có : $\angle AEB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\angle BIF = 90^\circ$ (Do $IX \perp AB$)

Tứ giác $BEFI$ có: $\angle AEB + \angle BIF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác $BEFI$ là tứ giác nội tiếp

b) Do tứ giác $BEFI$ nội tiếp nên $\angle AFI = \angle KIB$

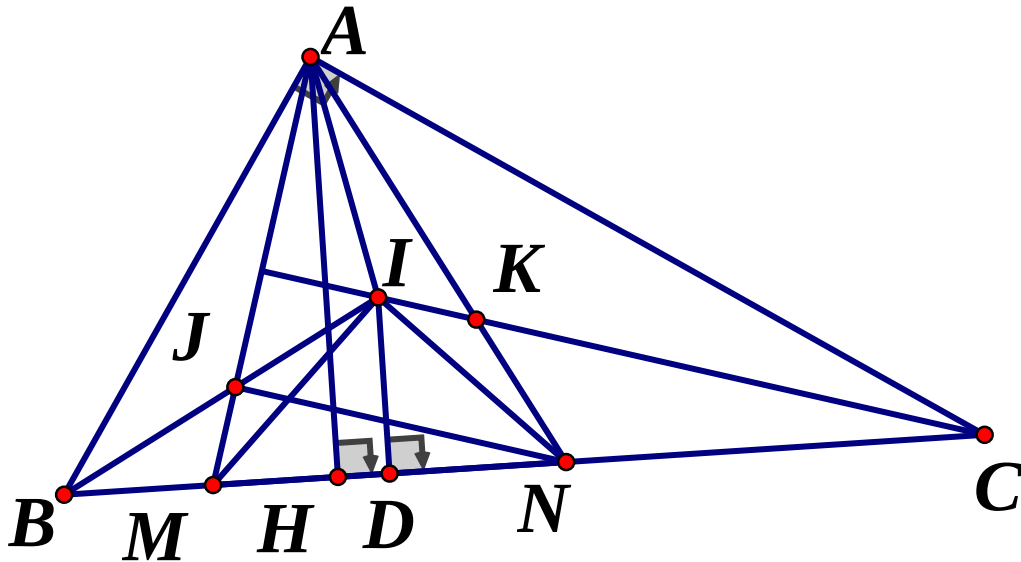
Xét $\triangle AIF$ và $\triangle KIB$ có: $\angle AFI = \angle KIB$ (cmt); $\angle AIF = \angle KIB = 90^\circ \Rightarrow \triangle AIF \sim \triangle KIB$

Xét $\triangle ACB$ có $\angle ACB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và $CI \perp AB$ (gt)

$$\text{Suy ra } CI^2 = AI \cdot IB = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow CI = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IF = \frac{CI}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Do } \triangle AIF \sim \triangle KIB \text{ nên } \frac{AI}{KI} = \frac{IF}{IB} \Rightarrow KI = \frac{AI \cdot IB}{IF} = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} \cdot \frac{4}{R\sqrt{3}} = R\sqrt{3}$$

2)



Gọi M, N là giao điểm của AJ, AK với BC , hạ $ID \perp BC$

Ta có: $BAN = 90^\circ - NAC = 90^\circ - NAH = BNA \Rightarrow ABN$ cân tại B

Tương tự $\triangle ACM$ cân tại C

Do đó, $IA = IM = IN$ nên D là trung điểm của MN

Mà $MN = AB + AC - BC = 2r = 2ID$ nên $\triangle MIN$ vuông tại I

Vì CK là trung trực của AM nên $KMC = KAC = \frac{1}{2}HAC = \frac{1}{2}ABC = IBC$ nên $MK \parallel BI$.

Mà BI là trung trực của AN nên $MK \perp AN$, tương tự $NJ \perp AM$

Do đó các điểm I, J, K nằm trên đường tròn đường kính MN có bán kính r (đpcm)

Câu 5.

Chọn ra n hàng có chứa số ô được đánh dấu nhiều nhất trên các hàng đó

	x		x	X	
		x		x	
	x				x
		x			
			x		

Ta chứng minh số ô được đánh dấu còn lại nhỏ hơn hoặc bằng n

Giả sử số ô được đánh dấu còn lại lớn hơn hoặc bằng $n + 1$

Các hàng còn lại chưa chọn là n

Theo nguyên lý Dirichlet sẽ có ít nhất một hàng (trong n hàng còn lại) chứa ít nhất hai ô đã đánh dấu.

Mà theo cách chọn thì n hàng đã chọn có chứa số ô được đánh dấu nhiều nhất trên các hàng đó. Có một hàng còn lại chưa chọn có ít nhất 2 ô đánh dấu, nên suy ra mọi hàng trong n hàng đã chọn đều có ít nhất 2 ô được chọn, tức là trên n hàng đã chọn không có ít hơn $2n$ ô đã được đánh dấu.

Nếu vậy, số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng $2n + (n + 1) > 3n$ trái giả thiết

Vậy sau khi chọn n hàng (với cách chọn như trên), sẽ còn lại không quá n ô được đánh dấu. Vì thế có nhiều nhất là n cột chứa chúng. Do đó, sẽ không còn ô đánh dấu nào nằm ngoài các hàng hay cột được chọn

Suy ra điều phải chứng minh.