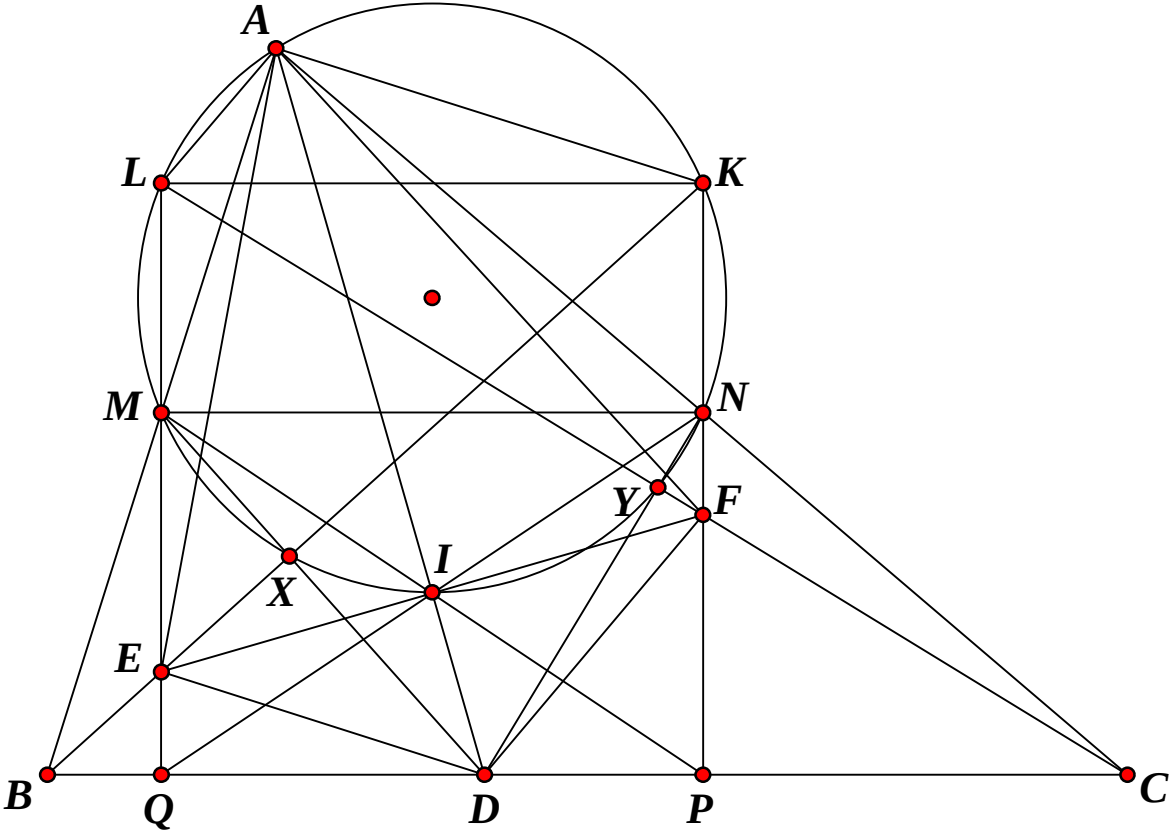


Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1 (5 điểm)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+3)\sqrt{x}+4=y(y^2-3y+6) \\ 3(y^2-2y)\sqrt{x^2-x+7}=y^2-x^2+11x-2y-10. \end{cases}$	
	+ Điều kiện xác định: $x \geq 0$ và $y \in \mathbb{R}$.	0,5
	+ Ta có phương trình đầu của hệ tương đương với $(\sqrt{x})^3+3\sqrt{x}=(y-1)^3+3(y-1) (*)$	1,0
	Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ có $f'(t)=3t^2+3>0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó (*) có dạng $f(\sqrt{x})=f(y-1)$ $\text{nên } \sqrt{x}=y-1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ x=y^2-2y+1. \end{cases}$	1,0
	+ Thay thế $y^2-2y=x-1$ vào phương trình thứ hai của hệ có $3(x-1)\sqrt{x^2-x+7}=-x^2+12x-11$ $\Leftrightarrow (x-1)\left[3\sqrt{x^2-x+7}+x-11\right]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 3\sqrt{x^2-x+7}+x-11=0 \quad (1). \end{cases}$	1,0
	Có (1) $\Leftrightarrow 3(\sqrt{x^2-x+7}-3)+(x-2)=0$ $\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{3(x+1)}{\sqrt{x^2-x+7}+3}+1\right]=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ (do } x \geq 0 \text{ thì } \frac{3(x+1)}{\sqrt{x^2-x+7}+3}+1>0).$	1,0
	+ Khi $x=1$ thì $y=2$; khi $x=2$ thì $y=1+\sqrt{2}$. Vậy hệ phương trình có đúng hai bộ nghiệm $(x;y)$ là $(1;2), (2;1+\sqrt{2})$.	0,5
Bài 2 (4 điểm)	Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1$ và $u_{n+1}=\frac{2u_n}{3}+\frac{u_n^2}{3n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. a) Chứng minh rằng $u_n > \frac{1}{n!}$ với mọi số nguyên dương $n \geq 2$. b) Tìm giới hạn của mỗi dãy số (u_n) và $(\sqrt[n]{u_n})$ khi n tiến ra $+\infty$.	

Bài	Nội dung	Điểm
2a (2,0 điểm)	a) Ta chứng minh kết quả (1): $u_n > \frac{1}{n!}, \forall n \geq 2$ bằng phương pháp quy nạp. + Với $n = 2$ thì $u_2 = \frac{2.1}{3} + \frac{1^2}{3.1} = 1 > \frac{1}{2!}$ là kết quả đúng.	0,5
	+ Giả sử đã có $u_n > \frac{1}{n!}$ với $n \geq 2$, khi đó $u_{n+1} = \frac{2u_n}{3} + \frac{u_n^2}{3n} > \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n!}\right) + \frac{1}{3n}\left(\frac{1}{n!}\right)^2$.	0,5
	Ta đi chứng minh (2): $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n!}\right) + \frac{1}{3n}\left(\frac{1}{n!}\right)^2 > \frac{1}{(n+1)!}$ với $n \geq 2$. Thật vậy, (2) $\Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} \cdot \left(\frac{1}{n!}\right) > \frac{1}{n+1}$ $\Leftrightarrow \frac{2n-1}{3(n+1)} + \frac{1}{3n}\left(\frac{1}{n!}\right) > 0.$ Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với $n \geq 2$. Vậy suy ra $u_{n+1} > \frac{1}{(n+1)!}$. Theo nguyên lí quy nạp có (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.	1,0
2b (2,0 điểm)	* Dùng quy nạp chứng minh $0 < u_n \leq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,5
	* Suy ra $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3n}(u_n - n) \leq 0, \forall n \geq 1$, do đó (u_n) giảm (không nghiêm ngặt).	0,5
	* Theo tiêu chuẩn Weierstrass suy ra tồn tại $L = \lim u_n$. Từ $u_{n+1} = \frac{2u_n}{3} + \frac{1}{3n} \cdot u_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ chuyển qua giới hạn ta được $L = \frac{2}{3}L + 0 \cdot L^2 \Leftrightarrow L = 0. \text{ Vậy } \lim u_n = 0.$	0,5
	* Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} \cdot u_n, \forall n \geq 1$ nên $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3n} \cdot u_n \right) = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$. Áp dụng định lý Cesaro cho dãy số dương (u_n) ta có $\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}$. Cách khác chứng minh $\lim u_n = 0$: Bằng quy nạp chỉ ra $u_n < \frac{3}{n}, \forall n \geq 1$, sau đó áp dụng định lý kẹp.	0,5

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 3 (3 điểm)	Xét hàm số $f:[0;+\infty)\rightarrow[0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện (1): $f(x^2+2xf(xy))=f(xy)+xf(x+y) \text{ với mọi } x,y\in[0;+\infty).$ a) Chứng minh rằng $f(0)$ là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[0;+\infty)$. b) Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn (1).	
3a (1,5 điểm)	Ta kí hiệu $P(u;v)$ chỉ việc thay thế $x=u, y=v$ vào phương trình hàm đã cho. a) Đặt $f(0)=a\geq 0$. + $P(x;0)\Rightarrow f(x^2+2ax)=a+xf(x), \forall x\geq 0$.	0,5
	+ Từ $x\geq 0$ và $f(x)\geq 0$ suy ra $f(x^2+2ax)\geq a, \forall x\geq 0$ (1).	0,5
	+ Bổ đề: Cho trước số thực $A\geq 0$, với mỗi số thực $t\geq 0$, luôn tồn tại $x\geq 0$ mà $x^2+Ax=t$. Hơn nữa khi $t>0$ thì $x>0$, còn khi $t=0$ thì $x=0$. Áp dụng Bổ đề trên, với mỗi số $t\geq 0$ chọn trước đều có $x\geq 0$ mà $x^2+2ax=t$. Khi đó (1) cho ta kết quả $f(t)\geq a, \forall t\geq 0$ (*). Thấy $t=0$ là một trường hợp cho dấu đẳng thức trong (*) xảy ra, vậy có điều phải chứng minh.	0,5
3b (1,5 điểm)	b) Xét hàm số f thỏa mãn yêu cầu. + Với $x>0, P(x;\frac{1}{x})\Rightarrow f(x^2+2xf(1))=f(1)+xf(x+\frac{1}{x})$ (2). Theo Bổ đề, tồn tại $x_0>0$ mà $x_0^2+2x_0f(1)=1$, khi đó (2) dẫn tới $x_0f(x_0+\frac{1}{x_0})=0$, suy ra $f(x_0+\frac{1}{x_0})=0$. Đặt $b=x_0+\frac{1}{x_0}>0$ thì ta có $f(b)=0$.	0,5
	+ Cố định $t\geq 0$. $P(x;\frac{t}{x})\Rightarrow f(x^2+2xf(t))=f(t)+xf(x+\frac{t}{x}), \forall x>0$ (3). Theo Bổ đề, tồn tại $x>0$ mà $x^2+2xf(t)=b$. Với x này thì (3) cho kết quả $f(b)=f(t)+xf(x+\frac{t}{x})\Leftrightarrow 0=f(t)+xf(x+\frac{t}{x})$	0,5
	$\Rightarrow f(t)\leq 0$. Kết hợp giả thiết $f(t)\geq 0$ suy ra $f(t)=0$. Vậy $f(x)=0, \forall x\geq 0$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu.	0,5

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 4 (4 điểm)	Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$ và hình chữ nhật $MNPQ$ nội tiếp tam giác ABC (với M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC và P, Q thuộc cạnh BC) sao cho $\widehat{MNQ} = \widehat{NMP} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$. Đường thẳng qua A, vuông góc với AB cắt đường thẳng NP tại K. Đường thẳng qua A, vuông góc với AC cắt đường thẳng MQ tại L. a) Gọi I là tâm của hình chữ nhật $MNPQ$. Chứng minh rằng AI là phân giác của góc $\widehat{BAC}$, tứ giác $MNKL$ là hình chữ nhật và tứ giác $ABQI$ nội tiếp một đường tròn. b) Gọi E là giao điểm của các đường thẳng BK, MQ và F là giao điểm của các đường thẳng CL, NP. Chứng minh rằng ba điểm I, E, F thẳng hàng và $AE = AF$.	
Hình vẽ		
4a (2,5 điểm)	*) Ta có $\widehat{MIN} = 180^\circ - \widehat{IMN} - \widehat{INM} = 180^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = 180^\circ - \widehat{BAC}$. Suy ra tứ giác $AMIN$ nội tiếp đường tròn (w). Mà $IM = IN$ nên suy ra AI là phân giác của góc $\widehat{BAC}$. *) Vì $\widehat{MAK} = \widehat{MKN} = \widehat{NAL} = \widehat{NML} = 90^\circ$ nên $K, L \in (w)$. Khi đó MK, NL là các đường kính của đường tròn (w) và tứ giác $MNKL$ là hình chữ nhật.	1,0 1,0

Bài	Nội dung	Điểm
	*) Gọi D là giao điểm của AI, BC. Ta có $\widehat{DQI} = \widehat{DQN} = \widehat{INM} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{BAI}$. Do đó tứ giác $ABQI$ nội tiếp một đường tròn.	0,5
4b (1,5 điểm)	*) Gọi X, Y lần lượt là giao điểm thứ hai của DM, DN với đường tròn (w) Khi đó ta có $XM \perp XK$ (1) Mặt khác ta có $\overline{DX} \cdot \overline{DM} = \overline{DI} \cdot \overline{DA} = \overline{DQ} \cdot \overline{DB}$ nên tứ giác $MXQB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MXB} = \widehat{MQB} = 90^\circ$ hay $XM \perp XB$ (2) Từ (1) và (2) suy ra B, X, K thẳng hàng hay B, E, X, K thẳng hàng	0,5
	Từ đó suy ra E là trực tâm của tam giác BDM Do đó $\widehat{DIQ} = \widehat{ABQ} = \widehat{MBQ} = \widehat{DEQ}$. Suy ra tứ giác $DIEQ$ nội tiếp Suy ra $\widehat{DIE} = \widehat{DQE} = 90^\circ$ hay $IE \perp ID$ (3) Chứng minh tương tự ta cũng có F là trực tâm tam giác CDN và $IF \perp ID$ (4) Từ (3), (4) suy ra I, E, F thẳng hàng.	0,5
	*) Mặt khác, do I là tâm của hình chữ nhật $MNPQ$ nên $\frac{IE}{IF} = \frac{IM}{IP} = 1 \Rightarrow IE = IF$ hay I là trung điểm của đoạn EF. Do đó tam giác AEF có AI vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên tam giác AEF cân tại A hay $AE = AF$.	0,5
Bài 5 (4 điểm)	a) Cho hai tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 20\}$ và $Y = \{1; 2; 3; \dots; 8\}$. Có tất cả bao nhiêu ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ sao cho với mỗi $x, y \in X$, cứ $x < y$ thì $f(x) \leq f(y)$? b) Trên đường tròn người ta đặt 2022 số mà mỗi số là 1 hoặc -1. Biết rằng tổng của 10 số liên tiếp nhau bất kì đều khác 0 và tổng của cả 2022 số trên đường tròn là số nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của tổng tất cả các số đặt trên đường tròn.	
5a (1,5 điểm)	+ Với mỗi $k = \overline{1, 8}$, ta đặt $f^{-1}(k) = x_k$, ở đó $f^{-1}(k)$ là tập hợp các tạo ảnh của phần tử $k \in Y$. Khi đó có hệ (I): $\begin{cases} x_1, \dots, x_8 \in \mathbb{N} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 20. \end{cases}$	0,5
	+ Mỗi ánh xạ f tương ứng với đúng một bộ nghiệm $(x_1, x_2, \dots, x_8)$ của hệ (I) theo nguyên tắc: $f^{-1}(1)$ là x_1 phần tử nhỏ nhất trong X, $f^{-1}(2)$ là x_2 phần tử nhỏ nhất trong $X \setminus f^{-1}(1)$, $f^{-1}(3)$ là x_3 phần tử nhỏ nhất trong $X \setminus (f^{-1}(1) \cup f^{-1}(2))$, ...	0,5

Bài	Nội dung	Điểm
	+ Đổi biến $y_i = x_i + 1$ thì (I) thành (II): $\begin{cases} y_1, y_2, \dots, y_8 \in \mathbb{N}^* \\ y_1 + y_2 + \dots + y_8 = 28. \end{cases}$ Theo kết quả bài toán chia kẹo Euler có số ánh xạ thỏa mãn là $C_{28-1}^{8-1} = C_{27}^7 = 888\,030$.	0,5
5b (2,5 điểm)	Gọi các số đặt trên đường tròn (theo chiều kim đồng hồ) lần lượt là $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$. Theo đó có $a_i = \pm 1, \forall i$; $S_i = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+9} \neq 0, \forall i$ (1), (ở đây các chỉ số được hiểu theo mode 2022); $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} > 0$. * Ta chứng minh với $i \neq j$ thì $S_i S_j > 0$ (2). Thật vậy, giả sử có $i < j$ mà $S_i S_j < 0$, chẳng hạn coi $S_i < 0 < S_j$. - Theo giả thiết có $S_{k+1} - S_k = a_{k+10} - a_k \leq 2$. - Mỗi tổng S_k là tổng của 10 số lẻ nên nó là số chẵn. Vậy phải có chỉ số t mà $i < t < j$ sao cho $S_t = 0$, điều này mâu thuẫn với (1). Do đó (2) đúng.	1,0
	* Có $10S = S_1 + S_2 + \dots + S_{2022} > 0$, theo trên có các số S_i là các số nguyên chẵn khác 0 và cùng dấu với nhau nên có $S_i \geq 2, \forall i$. Suy ra $S \geq \frac{2022 \times 2}{10} = 404,4$. Mặt khác S chẵn nên $S \geq 406$.	1,0
	* Để chỉ ra cách điền ứng với $S = 406$ ta chọn dãy $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ là: $\underbrace{X, X, \dots, X}_{201 \text{ cụm } X}, \underbrace{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}_{8 \text{ số } 1}, \underbrace{-1, -1, -1, -1}_{4 \text{ số } -1}$ ở đó cụm $X = \underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_{6 \text{ số } 1}, \underbrace{-1, -1, -1, -1}_{4 \text{ số } -1}$ Vậy min $S = 406$.	0,5

Chú ý: Mọi cách giải khác của thí sinh mà đúng, tổ giám khảo thống nhất và cho điểm tương ứng.

----- HẾT -----