

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN TỈNH KIÊN GIANG

NĂM HỌC 2020 – 2021

Thời gian: 150 phút

Bài 1(2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} \begin{pmatrix} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{pmatrix}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Hãy so sánh giá trị biểu thức A với $\frac{5}{2}$

Bài 2. (1, 0 điểm) Tìm tất cả các cặp số thực $(m;n)$ sao cho phương trình

$x^2 + mx + n = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(1 - x_1)(1 - x_2) = -2$, đồng thời phương

trình $2x^2 + nx + m = 0$ có hai nghiệm x_3, x_4 thỏa mãn $(2 - x_1)(2 - x_2) = \frac{3}{2}$

Bài 3. (1,0 điểm)

Giải phương trình: $x^2 + 2\sqrt{x-1} - 2x\sqrt{2-x} + 1 = 0$

Bài 4. (1 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a;b)$ sao cho ab là ước của $a^2 + b$

Bài 5. (1,5 điểm) Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , có $\angle ABC = 120^\circ$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Trên các cạnh AB, AD , tương ứng lấy các điểm E, F không trùng với các đỉnh của hình thoi đã cho, sao cho $\angle EOF = 60^\circ$. Hãy tính tích $BE \cdot DF$ theo a

Bài 6 (2,5 điểm) Cho tam giác ABC ($AB \leq AC$). Lấy điểm P nằm trong tam giác sao cho $AP < AB$. Đường tròn tâm A , bán kính AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại hai điểm phân biệt M, N (M khác với C đối với đường thẳng AB). Đường thẳng MN cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại K, L

a) Chứng minh rằng tứ giác $BLKC$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh tam giác ABP đồng dạng với tam giác APL

Bài 7. (1 điểm) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+1}{c^2a^2} + \frac{b^2+1}{a^2b^2} + \frac{c^2+1}{b^2c^2} \geq a(b+1) + b(c+1) + c(a+1)$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$\begin{aligned} a) A &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} \begin{pmatrix} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) + (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) + 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{2x+3\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

$$b) A - \frac{5}{2} = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} - \frac{5}{2} = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \leq 0$$

$$\text{Vậy } A \leq \frac{5}{2}$$

Bài 2.

Hai phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = m^2 - 4n \geq 0 \\ \Delta_2 = n^2 - 8m \geq 0 \end{cases} (*)$. Theo định lý Vi – et ta có:

$$x_1 + x_2 = -m; x_1 x_2 = n; x_3 + x_4 = \frac{-n}{2}; x_3 x_4 = \frac{m}{2}. \text{ Vậy}$$

$$\begin{cases} (1-x_1)(1-x_2) = -2 \\ (2-x_1)(2-x_2) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (x_1 + x_2) + x_1 x_2 = -2 \\ 4 - 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m + n = -2 \\ 4 + n + \frac{m}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -2 \end{cases} (tmdk(*))$$

$$\text{Vậy } (m; n) = (-1; -2)$$

Bài 3.

Điều kiện : $1 \leq x \leq 2$

$$x^2 + 2\sqrt{x-1} - 2x\sqrt{2-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x\sqrt{2-x} - x) + (x - 1 + 2\sqrt{x-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{x-1})^2 + (x - 1 + 2\sqrt{x-1}) = 0$$

$$\text{Do } x \geq 1, \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2\sqrt{x-1} \geq 0 \\ (x - \sqrt{x-1})^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ 2\sqrt{x-1} = 0 \\ (x - \sqrt{x-1})^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 (\text{tmdk})$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1\}$

Bài 4.

$$ab \mid a^2 + b \quad (1)$$

$$\text{Vì } ab \mid a^2 + b \text{ và } a \mid a^2 \Rightarrow a \mid b \Rightarrow b = ka \quad (k \in \mathbb{Z})$$

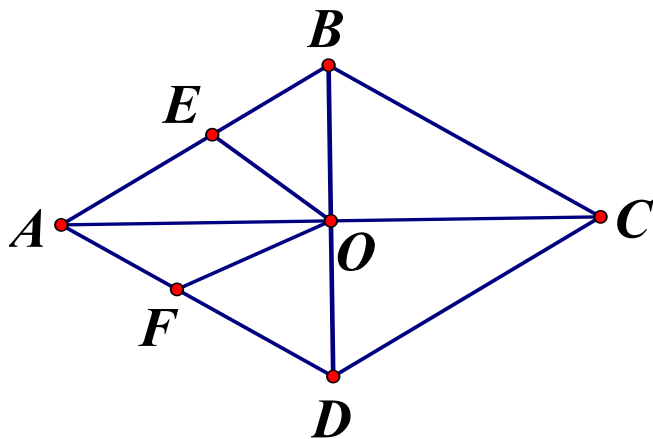
$$\text{Từ (1) suy ra } ka^2 \mid a^2 + ak \Rightarrow ka \mid a + k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \mid k \\ k \mid a \end{cases} \Rightarrow a = k \Rightarrow k^2 \mid 2k \Rightarrow 2 \mid k$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} k = a = 1 \\ b = ka = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k = a = 2 \\ b = ka = 4 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy cả 2 cặp số đều thỏa mãn

Bài 5.



Do tam giác ABC cân và $\angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ đều

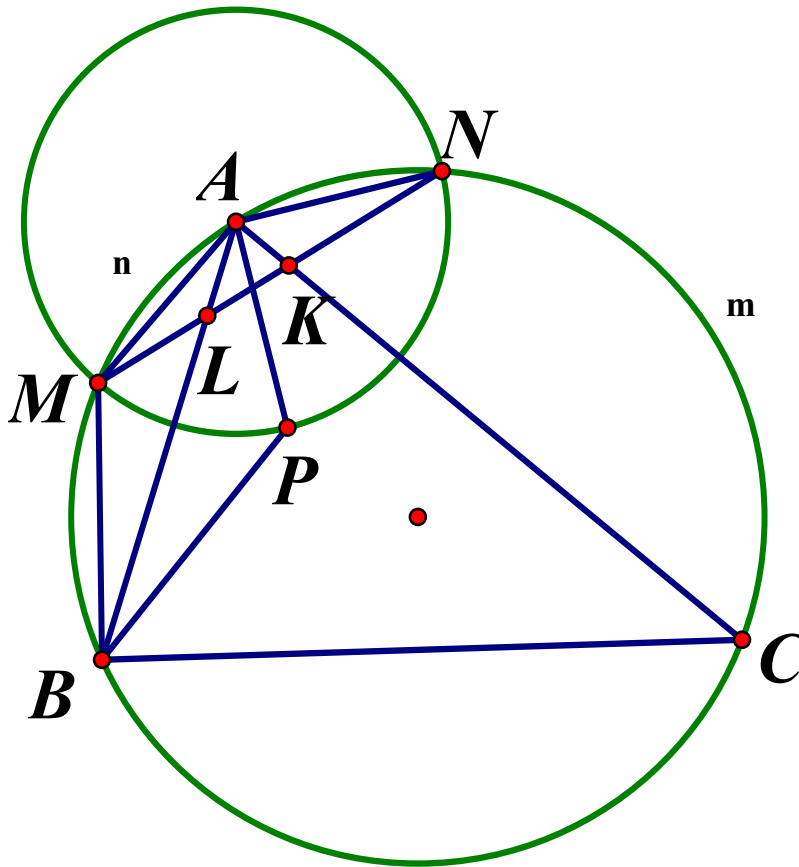
$\Rightarrow BD = AB = a, \angle ABO = \angle ADO = 60^\circ$. Ta có:

$$\angle EOB = 180^\circ - \angle EOF - \angle FOD = 180^\circ - 60^\circ - \angle FOD = 180^\circ - \widehat{FOD} - \widehat{FOD} = \widehat{OFD}$$

$$\text{Suy ra } \triangle EBO \cong \triangle OFD \Rightarrow \begin{cases} \angle EBO = 60^\circ = \widehat{FDO} \\ \widehat{EOB} = \angle OFD \end{cases} \Rightarrow \frac{EB}{OD} = \frac{OB}{FD}$$

$$\text{Hay } EB \cdot FD = OB \cdot OD = \frac{BD^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

Bài 6.



a) Do $AM = AN = AP$ nên $sd \widehat{AnB} = sd \widehat{AsN}$

$$\angle NKC = \frac{1}{2} (sd \widehat{AnM} + sd \widehat{NmC}) = \frac{1}{2} (sd \widehat{AsN} + sd \widehat{NmC}) = \frac{1}{2} sd \widehat{AmC} = \widehat{ABC}$$

Vậy $\widehat{LBC} = \widehat{NKC}$ nên tứ giác $BLKC$ nội tiếp

b) $sd \widehat{AnM} = sd \widehat{AsN} \Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{AMN}$

Ta có: $\widehat{MAB} = \widehat{MAL}$; $\angle MBA = \angle AMN \Rightarrow \triangle AML \cong \triangle ABM$

$$\widehat{MAB} = \widehat{MAL} \Rightarrow \angle MBA = \angle AMN$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AM} \text{ mà } AM = AP \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AL}{AP}$$

Mặt khác ta có $\angle LAP = \angle BAP$ nên $\triangle ABP \sim \triangle APL$

Bài 7.

$$\text{Nếu nhìn tương ứng } \begin{cases} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab + bc + ca \\ a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c \end{cases}$$

Ta có thể xuất phát từ bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z$ (*) với các số thực x, y, z thỏa $xyz = 1$

Thật vậy

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - 3) \geq 0$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3 \geq 0$$

Vậy ta đã chứng minh (*)

Áp dụng bất đẳng thức này ta có chú ý $(ab)(bc)(ca) = a^2b^2c^2 = 1$, được ngay:

$$(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + (a^2 + b^2 + c^2) \geq (ab + bc + ca) + (a + b + c)$$