

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KHÁNH HÒA
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2024-2025
Môn thi: TOÁN
Thời gian: 150 phút**

Bài 1. a) Cho biểu thức $A = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a - b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$

Rút gọn và tính giá trị biểu thức $B = \frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ khi $a = \sqrt[3]{8\sqrt{5} - 16}; b = \sqrt{5} + 1$

b) Chứng minh rằng biểu thức $C = 4x(x+y)(x+y+z)(x+z) + y^2z^2$ là một số chính phương với x, y, z là các số nguyên.

Bài 2. a) Cho đa thức $f(x) = (1 + x + x^3)^{2023} = a_{4046}x^{4045} + a_{4045}x^{4045} + \dots + a_1x + a_0$. Gọi m là tổng các hệ số ứng với lũy thừa bậc chẵn của biến x ; n là tổng các hệ số ứng với lũy thừa bậc lẻ của biến x . Chứng minh rằng m là số chẵn và n là số lẻ.

b) Tìm số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$ thỏa mãn $\sqrt{a+b} = \frac{\overline{ab}}{a+b}$.

Bài 3. a) Giải phương trình $(x+4)\sqrt{x^2+7} = x^2+4x+7$.

b) Cho x, y là hai số dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $D = \frac{(x+y)(1+xy)}{(x^2+1)(y^2+1)}$.

Bài 4. 1) Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Các tia phân giác của $\angle EHB, \angle DHC$ cắt AB, AC lần lượt tại I và K

a) Chứng minh rằng $AI = AK$.

b) Qua I và K lần lượt vẽ các đường vuông góc với AB và AC chúng cắt nhau tại M . Giả sử hai đỉnh B, C cố định, đỉnh A thay đổi. Chứng minh đường thẳng HM luôn đi qua một điểm cố định.

2) Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định, đỉnh A thay đổi thỏa mãn hai đường trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \cot B + \cot C$.

Bài 5. Cho hình lập phương trong đó mỗi mặt tương ứng được ghi một số trong tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (số được ghi trên hai mặt bất kỳ là khác nhau). Hỏi có thể ghi số trên các mặt sao cho số trên mỗi mặt là ước của tổng bốn số trên các mặt bên cạnh nó? Vì sao?

--- Hết ---

**ĐÁP ÁN THAM KHẢO ĐỀ THI HSG LỚP 9 TỈNH KHÁNH HÒA
NĂM HỌC 2024-2025**

Tác giả: Nguyễn Tiến Mỹ - Đội tuyển HSG huyện Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh năm học 2023-2024

Câu 1 (4 điểm) :

1. Cho biểu thức $A = \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b} - \frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$. Rút gọn và tính

giá trị biểu thức $B = \frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ khi $a = \sqrt[3]{8\sqrt{5}-16}; b = \sqrt{5}+1$.

2. Chứng minh rằng $C = 4x(x+y)(x+y+z)(x+z) + y^2z^2$ là một số chính phương với x, y, z là các số nguyên.

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có: } A &= \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b} - \frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+b+\sqrt{ab})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} - \frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\ &= \frac{b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{b} + \frac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\ &= \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = \frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{a-b}$$

Ta nhận thấy rằng $a = \sqrt[3]{8\sqrt{5}-16} = \sqrt[3]{(\sqrt{5}-1)^3} = \sqrt{5}-1$. Thế a và b vào B , ta có:

$$B = \frac{\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}}{(\sqrt{5}-1)-(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5-1}}{\sqrt{5}-1-\sqrt{5}-1} = -1.$$

Vậy $B = -1$ khi $a = \sqrt[3]{8\sqrt{5}-16}; b = \sqrt{5}+1$.

2. Ta có:

$$\begin{aligned} C &= 4x(x+y)(x+y+z)(x+z) + y^2z^2 \\ &= 4(x^2+xy+xz)(x^2+xy+yz+zx) + ((x^2+xy+yz+zx) - (x^2+xy+xz))^2 \\ &= ((x^2+xy+yz+zx) + (x^2+xy+xz))^2 = (2x^2+2xy+2xz+yz)^2 \end{aligned}$$

Do $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nên ta có đpcm.

Câu 2 (4 điểm) :

a) Cho đa thức $f(x) = (1+x+x^3)^{2023} = a_{4046}x^{4045} + a_{4045}x^{4045} + \dots + a_1x + a_0$. Gọi m là tổng các hệ số ứng với lũy thừa bậc chẵn của biến x ; n là tổng các hệ số ứng với lũy thừa bậc lẻ của biến x . Chứng minh rằng m là số chẵn và n là số lẻ.

b) Tìm số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$ thỏa mãn $\sqrt{a+b} = \frac{\overline{ab}}{a+b}$.

Lời giải.

a) Thế lần lượt $x=1$ và $x=-1$ vào $f(x)$, ta có:

$$\begin{cases} f(1) = (1+1+1)^{2023} = \sum_{i=0}^{2023} x_{2i} + \sum_{i=0}^{2022} x_{2i+1} \\ f(-1) = (1+(-1)+(-1)^2)^{2023} = \sum_{i=0}^{2023} x_{2i} - \sum_{i=0}^{2022} x_{2i+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=3^{2023} \\ m-n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3^{2023}+1}{2} \\ n = \frac{3^{2023}-1}{2} \end{cases}$$

Do $3 \equiv (-1) \pmod{4} \Rightarrow 3^{2023} \equiv (-1)^{2023} \equiv (-1) \pmod{4}$. Đặt $3^{2023} = 4k-1$ ($\exists k \cdot k \in \mathbb{Z}$).

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3^{2023}+1}{2} = \frac{(4k-1)+1}{2} = 2k \\ n = \frac{3^{2023}-1}{2} = \frac{(4k-1)-1}{2} = 2k-1 \end{cases}. \text{ Từ đây ta suy ra đpcm.}$$

2. Để ý rằng $VP \in \mathbb{Q} \Rightarrow VT \in \mathbb{Q} \Rightarrow a+b$ là số chính phương (1).

Giả thiết tương đương $\overline{ab} = (a+b)\sqrt{a+b} \geq 10 \Rightarrow a+b \geq 5$ (Do $a+b \in \mathbb{Z}$).

Kết hợp $a+b \leq 9+9=18$ và (1) $\Rightarrow a+b \in \{9; 16\}$.

Xét $a+b=9 \Rightarrow \overline{ab} = (a+b)\sqrt{a+b} = 9 \cdot \sqrt{9} = 27$ (Thỏa mãn $a+b=9$).

Xét $a+b=16 \Rightarrow \overline{ab} = (a+b)\sqrt{a+b} = 16 \cdot \sqrt{16} = 64$ (Không thỏa mãn $a+b=16$).

Vậy số cần tìm là 27.

Câu 3 (4,00 điểm):

a) Giải phương trình $(x+4)\sqrt{x^2+7} = x^2+4x+7$.

b) Cho x, y là hai số dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $D = \frac{(x+y)(1+xy)}{(x^2+1)(y^2+1)}$.

Lời giải.

a) ĐKXD: $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình tương đương: $2(x+4)\sqrt{x^2+7} = 2x^2+8x+14$

$$\Leftrightarrow (x^2+7) + (x+4)^2 - 9 = 2(x+4)\sqrt{x^2+7} \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+7} - x - 4)^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2+7} - x - 4 = \pm 3.$$

Xét $\sqrt{x^2+7} - x - 4 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+7} = x+7 \Rightarrow (x+7)^2 = x^2+7$ (ĐK: $x \geq -7$).

$\Leftrightarrow x^2+14x+49 = x^2+7 \Leftrightarrow 14x+42=0 \Leftrightarrow x=-3$ (Thỏa mãn ĐKXD và ĐK).

Xét $\sqrt{x^2+7} - x - 4 = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+7} = x+1 \Rightarrow x^2+7 = (x+1)^2$ (ĐK $x \geq -1$).

$\Leftrightarrow x^2+2x+1 = x^2+7 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$ (Thỏa mãn ĐKX và ĐK).

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{\pm 3\}$.

b) Áp dụng BĐT Bunhia vào $(x^2+1)(y^2+1)$, ta có:

$$\begin{aligned} (x^2+1)(y^2+1) &= \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \cdot \sqrt{(x^2+1)(1+y^2)} \geq \sqrt{(xy+1.1)^2} \sqrt{(x:1+1.y)^2} \\ &= (x+y)(1+xy) \Rightarrow \text{Áp dụng vào biểu thức } D, \text{ ta có:} \end{aligned}$$

$$D = \frac{(x+y)(1+xy)}{(x^2+1)(y^2+1)} \leq \frac{(x+y)(1+xy)}{(x+y)(1+xy)} = 1.$$

Vậy $\text{Max} D = 1$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$.

Câu 4(6,00 điểm) :

1. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Các tia phân giác của $\angle EHB, \angle DHC$ cắt AB, AC lần lượt tại I và K .

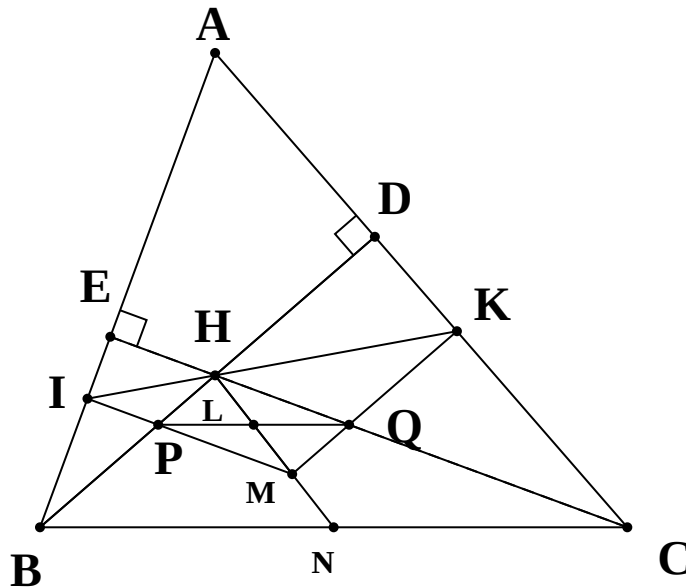
a) Chứng minh $AI = AK$.

b) Qua I và K lần lượt vẽ các đường vuông góc với AB và AC chúng cắt nhau tại M .

Giả sử hai đỉnh B, C cố định, đỉnh A thay đổi. Chứng minh đường thẳng HM luôn đi qua một điểm cố định.

2. Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định, đỉnh A thay đổi thỏa mãn hai đường trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\cot B + \cot C$.

Lời giải.



a) Ta có HI là tia phân giác $\angle EHB \Rightarrow \angle IHE = \angle IHB = \frac{1}{2} \angle EHB$.

Tương tự ta có $\angle DHK = \angle CHK = \frac{1}{2} \angle DHC$. Mà $\angle EHB = \angle DHC$ (hai góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \angle DHK = \angle CHK = \angle IHB = \angle IHE = \frac{1}{2} \angle EHB = \frac{1}{2} \angle DHC \quad (1).$$

Lại có: $\angle IHE + \angle IHC = \angle EHC = 180^\circ \Rightarrow \angle KHC + \angle IHC = 180^\circ \Leftrightarrow \angle IHK = 180^\circ \Rightarrow I, H, K$ thẳng hàng.

Xét $\triangle IHE$ vuông ở $E \Rightarrow \angle HIE = 90^\circ - \angle IHE$. Tương tự, $\angle HKD = 90^\circ - \angle DHK$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow \angle HKD = \angle HIE$ (2). Xét $\triangle AIK$ có (2) $\Rightarrow \triangle AIK$ cân ở $A \Rightarrow AI = AK$ (đpcm).

b) Gọi P, Q, L, N lần lượt là giao điểm của IM và BH, MK và CH, HM và PQ, HM và BC .

Xét tứ giác $HPMQ$ có $PM \parallel HQ$ (cùng vuông góc AB), $PH \parallel MQ$ (cùng vuông góc AC)

$\Rightarrow HPMQ$ là hình bình hành $\Rightarrow PL = QL$ (3).

Xét $\triangle BHE$ có $PI \parallel HE \Rightarrow \frac{PH}{PB} = \frac{IE}{IB}$ (Áp dụng định lý Thales) (4).

Xét $\triangle BHE$ có HI là tia phân giác $\angle EHB \Rightarrow \frac{IE}{IB} = \frac{HE}{HB}$. Kết hợp với (4) $\Rightarrow \frac{PH}{PB} = \frac{HE}{HB}$ (5).

Tương tự ta có $\frac{HQ}{QC} = \frac{HD}{HC}$ (6). Xét $\triangle EHB$ và $\triangle DHC$ có (1) và $\angle HEB = \angle HDC = 90^\circ$

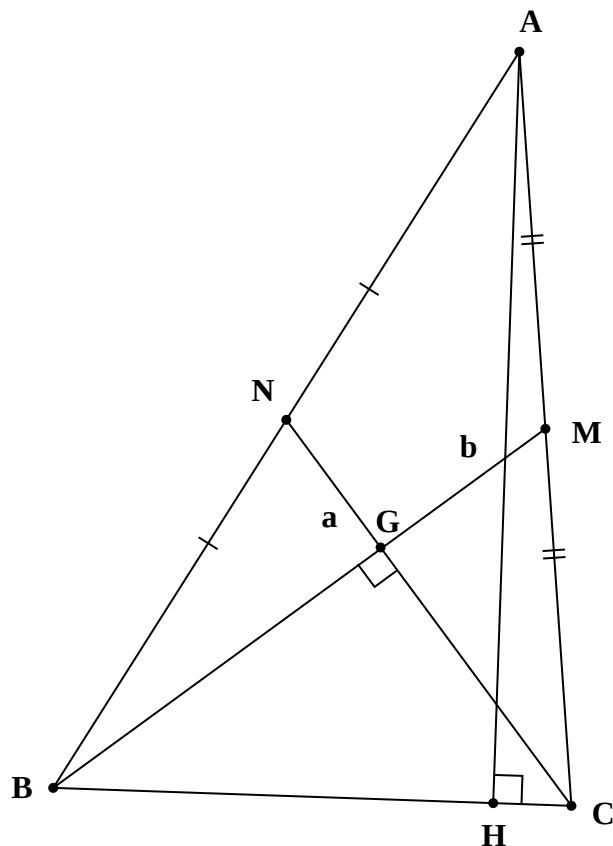
$\Rightarrow \triangle EHB \sim \triangle DHC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{HE}{HB} = \frac{HD}{HC}$. Kết hợp (5) và (6) $\Rightarrow \frac{PH}{PB} = \frac{HQ}{QC}$ (7).

Xét $\triangle BHC$ có (7) $\Rightarrow PQ \parallel BC$ (Áp dụng định lý Thales đảo) $\Rightarrow \frac{BN}{CN} = \frac{PL}{QL} = 1$

(Do có (3)).

$\Rightarrow N$ là trung điểm của BC . Mà BC cố định $\Rightarrow N$ cố định.

Nhận thấy rằng HM đi qua N nên ta có đpcm.



2. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Gọi G là giao điểm của BM và CN . Đặt $GM = b$; $GN = a$.

Xét $\triangle ABC$ có trung tuyến BM cắt trung tuyến CN tại $G \Rightarrow G$ là trọng tâm $\triangle ABC$.

$\Rightarrow BG = 2GM = 2b$; $GC = 2GN = 2a$. Xét $\triangle GNB$; $\triangle GMC$; $\triangle BGC$ lần lượt đều vuông ở G

$$\Rightarrow \begin{cases} BN = \sqrt{GN^2 + GB^2} = \sqrt{a^2 + 4b^2} \\ CM = \sqrt{GM^2 + GC^2} = \sqrt{4a^2 + b^2} \\ BC = \sqrt{BG^2 + CG^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2BN = 2\sqrt{a^2 + 4b^2} \\ AC = 2CM = 2\sqrt{4a^2 + b^2} \end{cases}$$

Vì BC cố định nên $a^2 + b^2$ cố định.

Xét $\triangle ABC$ ta lại có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \geq \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{AB^2 + AC^2} \quad (\text{Áp dụng BĐT Cauchy})$$

$$\Leftrightarrow \cos A \geq \frac{4(a^2 + 4b^2) + 4(4a^2 + b^2) - 4(a^2 + b^2)}{4(a^2 + 4b^2) + 4(4a^2 + b^2)} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} \leq \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \leq \frac{AB^2 + AC^2}{4} \cdot \frac{3}{5} \quad (\text{Áp dụng BĐT Cauchy})$$

$$\Leftrightarrow S_{ABC} \leq \frac{4(a^2 + 4b^2) + 4(4a^2 + b^2)}{4} \cdot \frac{3}{5} = 3(a^2 + b^2). \text{ Mặt khác, } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} \leq \frac{2 \cdot 3(a^2 + b^2)}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = 3\sqrt{a^2 + b^2}. \text{ Xét } \triangle AHB \text{ và } \triangle AHC \text{ lần lượt đều vuông ở } H$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cot B = \frac{BH}{AH} \\ \cot C = \frac{CH}{AH} \end{cases} \Rightarrow \cot B + \cot C = \frac{BH}{AH} + \frac{CH}{AH} = \frac{BC}{AH} \geq \frac{BC}{3\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{3\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{3}.$$

Vậy GTNN của $\cot B + \cot C$ là $\frac{2}{3}$. Đạt được khi $\triangle ABC$ cân ở A .

Lưu ý: Ở trong bài làm có sử dụng công thức $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$ và $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$,

hai công thức này ở trong các kì thi HSG cấp THCS thường không được áp dụng trực tiếp, vì thế nên trong bài làm, chúng ta nên chứng minh nó qua bài toán phụ hoặc trực tiếp trong bài toán.

Câu 5 (2,00 điểm): Cho hình lập phương trong đó mỗi mặt tương ứng được ghi một số trong tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (số được ghi trên hai mặt bất kỳ là khác nhau). Hỏi có thể ghi số trên các mặt sao cho số trên mỗi mặt là ước của tổng bốn số trên các mặt bên cạnh nó? Vì sao?

Lời giải. Gọi các số được ghi ở 6 mặt của hình lập phương đó lần lượt là $a_1; a_2; \dots; a_6$.

Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 đối diện với $a_6; a_2$ đối diện với $a_4; a_3$ đối diện với a_5 .

Giả sử tồn tại cách ghi thỏa mãn. Để ý rằng tổng các mặt luôn bằng $1 + 2 + \dots + 6 = 21$ không đổi.

$$\text{Theo bài ra ta có: } \begin{cases} (a_2 + a_3 + a_4 + a_5) : a_1 \\ (a_2 + a_3 + a_4 + a_5) : a_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (21 - a_1 - a_6) : a_1 \\ (21 - a_1 - a_6) : a_6 \end{cases} \Rightarrow (21 - a_1 - a_6) : [a_1, a_6]$$

$$\Rightarrow 21 - a_1 - a_6 \geq [a_1, a_6] \Leftrightarrow a_1 + a_6 + [a_1, a_6] \leq 21 \quad (2).$$

Từ (2) ta thấy số 5 có thể đối diện số 1, 2; số 4 và số 6 có thể đối diện số 1, 2, 3.

Do (1) nên a_1 và a_6 không thể cùng là số chẵn. Vì thế số 4 và số 6 chỉ có thể đối diện số 1, 3.

Như vậy để tồn tại cách ghi thỏa mãn thì bắt buộc số 5 đối diện số 2.

Tuy nhiên nếu vậy thì lại không thỏa mãn (1), mâu thuẫn với giả sử.

Vậy không tồn tại cách ghi thỏa mãn đề bài.