

Câu 1. (5,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

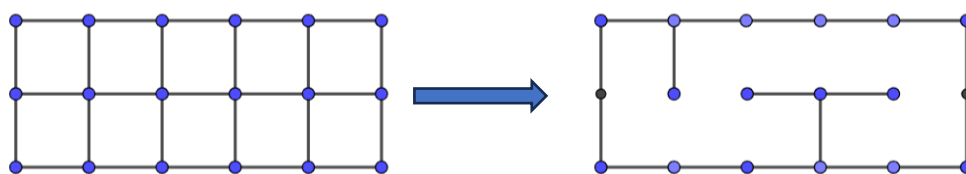
$$f(f(x) \cdot f(x+y)) = yf(x) + x^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 2. (5,0 điểm) Cho A là tập tất cả các số nguyên n thỏa mãn $1 \leq n \leq 2022$ và n nguyên tố cùng nhau với 2022. Với mỗi số tự nhiên j , đặt $S(j) = \sum_{n \in A} n^j$.

- Chứng minh rằng $S(j)$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên j
- Nếu j chia hết cho 336, tìm số dư của $S(j)$ khi chia cho 2022
- Chứng minh rằng nếu j không chia hết cho 336 thì $S(j)$ chia hết cho 2022

Câu 3. (5,0 điểm) Cho căn nhà có mặt sàn là hình chữ nhật kích thước $2 \times n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Ban đầu, căn nhà được xây kín, chia thành $2n$ căn phòng đều nhau, ngăn cách với nhau bởi các bức tường. Sau đó, ta cần phá đi một số bức tường trong căn nhà để từ một căn phòng bất kì đều có đường đi tới tất cả các căn phòng khác.

- Hỏi cần phá ít nhất bao nhiêu bức tường để làm được như vậy.
- Với số bức tường cần phá ít nhất như trên, hãy đếm số cách phá thỏa mãn.



Câu 4. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC có $AB < AC$, P là một điểm thay đổi bên trong tam giác. Điểm Q bên trong tam giác ABC sao cho $\angle PAB = \angle QAC$ và PQ song song BC . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\angle EQA = \angle PCB$ và trên cạnh AB lấy điểm F sao cho $\angle FQA = \angle PBC$. Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại T . Kẻ tiếp tuyến TR của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC , với R là tiếp điểm nằm bên trong tam giác ABC . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ARC . Trung trực của đoạn RE cắt đường thẳng TI tại U . Chứng minh rằng đường tròn tâm U , bán kính UR luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

-HẾT-

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:

Cán bộ coi thi số 1:..... Cán bộ coi thi số 2: