

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI QUẢNG TRỊ 2023-2024

Vòng 2

Câu 1. 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng với mọi điểm O , ta luôn có

$$OA^2 - OB^2 + OC^2 - OD^2 = \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2).$$

2. Cho tam giác ABC . Dựng về phía ngoài tam giác ABC các hình vuông ABB_1A_2 , BCC_1B_2 , CAA_1C_2 .

a) Chứng minh rằng đường trung trực của các đoạn thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

b) Gọi ω là đường tròn đi qua tâm của các hình vuông nói ở đầu bài. Chứng minh rằng nếu ω đi qua một đỉnh nào đó của tam giác ABC thì tam giác ABC có một góc bằng 135° .

Lời giải. 1. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$.

$$\begin{aligned} OA^2 - OB^2 + OC^2 - OD^2 &= (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC})^2 - (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{ID})^2 \\ &= 2(IA^2 - IB^2) + 2\overrightarrow{OI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{ID}) = \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2). \end{aligned}$$

2. a) Gọi M là giao điểm của đường trung trực của A_1A_2 và đường trung trực của B_1B_2 .

Áp dụng kết quả ý 1 với các hình vuông BCC_1B_2, CAA_1C_2 ta được

$$C_1M^2 - B_2M^2 + MB^2 - MC^2 = \frac{1}{2}(C_1B^2 - B_2C^2) = 0 \Rightarrow C_1M^2 = B_2M^2 + MC^2 - MB^2,$$

$$C_2M^2 - A_1M^2 + MA^2 - MC^2 = \frac{1}{2}(C_2A^2 - A_1C^2) = 0 \Rightarrow C_2M^2 = A_1M^2 + MC^2 - MA^2.$$

Do đó $C_1M^2 - C_2M^2 = B_2M^2 - MB^2 + MA^2 - A_1M^2 = B_1M^2 - MB^2 + MA^2 - A_2M^2$.

Mà theo kết quả ý 1 (đối với hình vuông ABB_1A_2),

$$B_1M^2 - MB^2 + MA^2 - A_2M^2 = \frac{1}{2}(B_1A^2 - A_2B^2) = 0,$$

nên $MC_1 = MC_2$, hay M thuộc đường trung trực của C_1C_2 . Vậy đường trung trực của các đoạn thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy (tại M).

b) Không mất tính tổng quát, giả sử tam giác ABC có hướng thuận (hướng dương), và $B \in \omega$. Gọi I, J, K lần lượt là tâm của các hình vuông dựng trên các cạnh AB, BC, CA .

Trước hết, ta chứng minh $KI \perp AJ$.

Gọi D, E, F là trung điểm của AB, BC, CA . Ta có,

$\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{KF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DI}$. Dưới phép quay $Q^{\pi/2}$,

$$\overrightarrow{KF} \rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DI} \rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \rightarrow \overrightarrow{EJ}.$$

$$\Rightarrow Q^{\pi/2}(\overrightarrow{KI}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{AJ}.$$

Suy ra $KI \perp AJ$. Tương tự, ta cũng có $IJ \perp BK, JK \perp CI$.

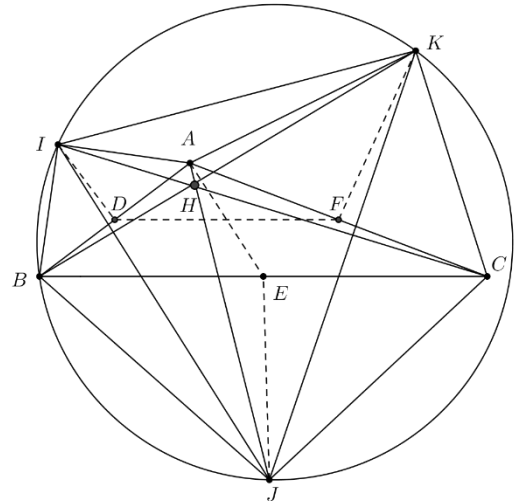
Nên AJ, BK, CI đồng quy tại trực tâm H của tam giác IJK .

Tiếp theo, ta chứng minh H trùng với một trong hai điểm A hoặc C và kết thúc bài toán.

Giả sử ngược lại, $H \neq A, H \neq C$. Trước hết, B đối xứng với H qua IJ , do B là giao của đường cao KH với đường tròn ω . Từ đó, $IB = IH$.

Mà $IA = IB$ nên $IA = IH$. Lại do $AH \perp IK$ nên H đối xứng với A qua IK . Suy ra $A \in \omega$.

Từ $I, B, A \in \omega$ và $\angle AIB = 90^\circ$, suy ra BA là một đường kính của ω . Lập luận tương tự, BC cũng là một đường kính của ω . Suy ra $A \equiv C$, vô lí. Vậy, H trùng với một trong 2 điểm A hoặc C . Không



mất tổng quát, giả sử H trùng A . Suy ra I, A, C thẳng hàng. Kết hợp với $\angle BAI = 45^\circ$, suy ra $\angle BAC = 135^\circ$.

Câu 2. Kí hiệu S là tập tất cả các số thực dương.

Cho ánh xạ f đi từ tập S^3 vào S sao cho với mọi $(x, y, z) \in S^3$ và với mọi $t > 0$, hai điều kiện sau đây đồng thời được thỏa mãn

- i) $f(x, y, z) = \frac{z}{x} f(z, y, x)$;
- ii) $f(x, ty, t^2 z) = t \cdot f(x, y, z)$.
- a) Chứng minh rằng $f(tx, ty, tz) = f(x, y, z), \forall x, y, z, t > 0$.
- b) Giả sử f thỏa mãn thêm điều kiện $f(x, y, x+y) = \frac{x+y}{x}, \forall x, y > 0$. Tính $f(2, 2, 2)$.

Lời giải. a) Áp dụng điều kiện ii), ta có

$$f(tx, ty, tz) = f\left(tx, \sqrt{t}(\sqrt{t}y), \sqrt{t}^2 z\right) = \sqrt{t} \cdot f\left(tx, \sqrt{t}y, z\right), \forall x, y, z, t > 0.$$

Lại áp dụng điều kiện i), rồi điều kiện ii), ta được

$$f\left(tx, \sqrt{t}y, z\right) = \frac{z}{tx} f\left(z, \sqrt{t}y, tx\right) = \frac{z}{tx} \cdot \sqrt{t} \cdot f\left(z, y, x\right) = \frac{z}{\sqrt{t}x} \cdot f\left(z, y, x\right) \forall x, y, z, t > 0.$$

Kết hợp hai điều trên, ta được $f(tx, ty, tz) = \frac{z}{x} \cdot f(z, y, x)$. Sử dụng i) thêm một lần nữa, ta được

$$f(tx, ty, tz) = \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{z} \cdot f(x, y, z) = f(x, y, z), \forall x, y, z, t > 0.$$

b) Từ $f(x, y, x+y) = \frac{x+y}{x}, \forall x, y > 0$ cho $x=1, y=t > 0$, ta được $f(1, t, 1+t) = 1+t, \forall t > 0$.

Áp dụng kết quả câu a), ta có $f(2, 2, 2) = f(2 \cdot 1, 2 \cdot 1, 2 \cdot 1) = f(1, 1, 1)$.

Theo ii) thì $f(1, 1, 1) = f\left(1, t \cdot \frac{1}{t}, t^2 \cdot \frac{1}{t^2}\right) = t \cdot f\left(1, \frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}\right), \forall t > 0$. Chọn $t = t_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \frac{1}{t_0^2} = 1 + \frac{1}{t_0}$, và áp dụng $f(1, t, 1+t) = 1+t, \forall t > 0$, ta được

$$f(1, 1, 1) = t_0 \cdot f\left(1, \frac{1}{t_0}, \frac{1}{t_0^2}\right) = t_0 \cdot f\left(1, \frac{1}{t_0}, 1 + \frac{1}{t_0}\right) = t_0 \left(1 + \frac{1}{t_0}\right) = t_0 + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Vậy, $f(2, 2, 2) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Câu 3. Một tập hợp A được gọi là tập *tam giác* nếu 3 phần tử phân biệt bất kì trong A đều là 3 cạnh của một tam giác.

- a) Tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ có bao nhiêu tập con là tập tam giác?
- b) Cho A là một tập con của tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$, với $n \geq 4$. Chứng minh rằng nếu A là một tập tam giác thì $|A| \leq \frac{n}{2} + 1$.

c) Với $n \geq 2$, hãy xác định số tập tam giác là tập con 3 phần tử của tập $\{1, 2, \dots, 2n\}$.

Lời giải. Kí hiệu $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

a) Một tập tam giác không thể chứa số 1.

TH1: Ta đếm số tập tam giác là tập con 3 phần tử của S_7 :

- + Các tập tam giác có phần tử nhỏ nhất bằng 2 là $\{2, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 5, 6\}, \{2, 6, 7\}$.
- + Các tập tam giác có phần tử nhỏ nhất bằng 3 là $\{3, 4, 5\}, \{3, 5, 6\}, \{3, 6, 7\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 5, 7\}$.
- + Các tập tam giác có phần tử nhỏ nhất lớn hơn hay bằng 4 là $C_4^3 = 4$.

Trường hợp 1 có 13 tập tam giác là tập con 3 phần tử của S_7 .

TH2: Các tập tam giác là tập con 4 phần tử của $S_7 : \{3,4,5,6\}, \{3,5,6,7\}, \{4,5,6,7\}$.

TH3: Xét X là tập tam giác có 5 phần tử. Rõ ràng $1 \notin X$. Ngoài ra nếu $2 \in X$ thì các cặp $(3,5), (4,6)$ không thể cùng thuộc X . Tương tự, nếu $3 \in X$ thì các cặp $(2,5), (4,7)$ không thể cùng thuộc X . Nên $|X| \leq 4$, vô lý.

Vậy S_7 có 16 tập con là tập tam giác.

b) Giả sử $A \subset S_n = \{1, 2, \dots, n\}$ là một tập tam giác mà số phần tử là lớn nhất có thể. Gọi $a < b$ là hai phần tử nhỏ nhất trong A . Nếu $b \geq a + 2$ thì thay phần tử a bởi $a + 1$, ta được một tập mới với số phần tử không đổi, và hiển nhiên cũng là một tập tam giác, do $a + 1 + b > a + b$. Do vậy, ta chỉ xét tập A như vậy mà hai phần tử nhỏ nhất là a và $a + 1$. Khi đó, phần tử lớn nhất của A không vượt quá $2a$.

Suy ra $A \subset A^* = \{a, a + 1, \dots, 2a\} \cap S_n$. Nếu $2a > n$, $|A^*| = |\{a, a + 1, \dots, n\}| = n - a + 1 < \frac{n}{2} + 1$. Còn nếu

$2a \leq n$, $|A^*| = |\{a, a + 1, \dots, 2a\}| = a + 1 \leq \frac{n}{2} + 1$. Suy ra, trong mọi trường hợp, $|A| \leq \frac{n}{2} + 1$.

c) **Cách 1 (đếm trực tiếp).** Kí hiệu s_n là đáp số của bài toán. Gọi $\{a, b, c\} \subset S_n$ là một tập tam giác, với $a < b < c$. Khi đó $a \geq 2, c - b < a$.

Khi $n = 2$, số tập tam giác của S_4 là 1. Xét $n \geq 3$.

TH1: Khi $a \geq n$ thì số tập tam giác 3 phần tử bằng C_{n+1}^3 , do mọi tập con 3 phần tử của tập $\{n, n + 1, \dots, 2n\}$ đều là tập tam giác.

TH2: Khi $a = k$ với $k \in \{2, 3, \dots, n - 1\}$.

- Với $c - b = 1$ thì $b \in [k + 1; 2n - 1], c = b + 1$ nên có $2n - k - 1$ tập tam giác.

- Tương tự, với $c - b = 2$: Có $2n - k - 2$ tập tam giác.

...

- Với $c - b = k - 1$ thì $b \in [k + 1; 2n - k + 1], c = b + k - 1$ nên có $2n - 2k + 1$ tập tam giác.

Suy ra số tập tam giác ứng với $a = k$ là

$$(2n - k - 1) + (2n - k - 2) + \dots + (2n - k - (k - 1)) = \frac{(4n - 3k)(k - 1)}{2}.$$

Do đó, số tập tam giác trong trường hợp này là

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{(4n - 3k)(k - 1)}{2} = \sum_{k=2}^{n-1} \left(2n(k - 1) - \frac{3}{2}k(k - 1) \right) = 2n \sum_{k=1}^{n-2} k - \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n-2} k(k + 1) = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{2}.$$

$$\text{Vậy, } s_2 = 1 \text{ và } s_n = 3C_n^3 + C_{n+1}^3 = \frac{n(n - 1)(4n - 5)}{6}, \forall n \geq 3.$$

Cách 2 (đếm gián tiếp qua phần bù). Ta sẽ đếm số tập con 3 phần tử $X = \{a, b, c\}$, với $a < b < c$ mà không là tập tam giác.

Do X không là tập tam giác nên $a + b \leq c \leq 2n$. Để ý rằng ta cũng phải có $3 \leq a + b \leq 2n$.

Với mỗi $k = a + b \in [3, 2n - 1]$, có $2n - k + 1$ cách chọn c . Hơn nữa, số cách chọn cặp (a, b) với $a < b$

sao cho $a + b = k$ là $\left\lfloor \frac{k - 1}{2} \right\rfloor$, nên số tập X thỏa mãn là

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{2n} \left\lfloor \frac{k - 1}{2} \right\rfloor (2n - k + 1) &= \sum_{l=1}^{n-1} 2l(n - l) + \sum_{l=1}^{n-1} l(2n - 2l - 1) \\ &= (4n - 1) \sum_{l=1}^{n-1} l - 4 \sum_{l=1}^{n-1} l^2 = \frac{(4n - 1)(n - 1)n}{2} - \frac{2(n - 1)n(2n - 1)}{3} = \frac{n(n - 1)(4n + 1)}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra đáp số là } C_{2n}^3 - \frac{n(n - 1)(4n + 1)}{6} = \frac{n(n - 1)(4n - 5)}{6}.$$

Cách 3 (đếm bằng truy hồi). Xét một tập tam giác 3 phần tử là tập con của tập S_{n+1} và gọi phần tử lớn nhất của X là c .

Nếu $c \leq 2n$, số tập X thỏa mãn chính là s_n .

Xét trường hợp $c = 2n+1$. Số tập X thỏa mãn chính bằng số cặp (a, b) với $2 \leq a < b \leq 2n$ và $a+b \geq 2n+2$. Nếu $b = 2n \Rightarrow a = 2, 3, \dots, 2n-1$, có $2n-2$ tập X thỏa mãn. Tương tự như vậy, trường hợp này có tất cả $(2n-2) + (2n-4) + \dots + 2$ tập X thỏa mãn.

Trường hợp $c = 2n+2$, số tập X thỏa mãn là $(2n-1) + (2n-3) + \dots + 1$. Suy ra

$$s_{n+1} = s_n + (2n-1) + (2n-2) + \dots + 1 = s_n + 2n^2 - n$$

$$\Rightarrow s_n = s_{n-1} + 2(n-1)^2 - (n-1) = \dots = s_2 + \sum_{k=2}^{n-1} (2k^2 - k) = \sum_{k=1}^{n-1} (2k^2 - k).$$

Thu gọn tổng này, ta được $s_n = \frac{n(n-1)(4n-5)}{6}, \forall n \geq 2$.

----- **HẾT** -----