

Câu 1. (3,5 điểm)

- a) Giải phương trình $(x^2 - x + 1)(x^2 + 4x + 1) = -4x^2$
- b) Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} - 2\sqrt{15+2x-x^2} = -4$
- c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 3x = 14y \\ (x^2 + 3x)(x + y - 3) = 18y \end{cases}$$

Câu 2. (1,5 điểm)

- a) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + 3pq + 4q^2$ là một số chính phương
- b) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tồn tại các số tự nhiên x, y thỏa mãn
- $$x^3 + y^3 - 6xy = p - 8$$

Câu 3. (1,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 3$. Chứng minh rằng :

- a) $a + b + c \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$
- b) $\frac{2ab+3}{(a+b)^2} + \frac{2bc+3}{(b+c)^2} + \frac{2ca+3}{(c+a)^2} \geq 6$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) sao cho hai tia BA và CD cắt nhau tại điểm E . Hai tia AD, BC cắt nhau tại điểm F . Gọi G, H lần lượt là trung điểm của AC, BD . Đường phân giác của các góc $\angle BEC$ và $\angle AFB$ cắt nhau tại điểm K . Gọi L là hình chiếu vuông góc của K trên đường thẳng EF . Chứng minh rằng :

- a) $\angle DEF + \angle DFE = \angle EBF$ và $KL = \sqrt{LE.LF}$
- b) $\angle GED = \angle HEA$ và $EG.FH = EH.FG$
- c) $\frac{MB}{MC} + \frac{NB}{NA} = 2 \cdot \frac{KH}{KG}$; trong đó M là giao điểm của hai đường thẳng EK và BC , N là giao điểm của hai đường thẳng FK và AB

Câu 5. (1,0 điểm) Thầy Hùng viết các số nguyên $1; 2; 3; \dots; 2021; 2022$ lên bảng. Thầy Hùng xóa đi 1010 số bất kỳ trên bảng. Chứng minh rằng trong các số còn lại trên bảng luôn tìm được:

- a) 3 số có tổng các bình phương là hợp số
- b) 504 số có tổng các bình phương chia hết cho 4

ĐÁP ÁN

Câu 1. (3,5 điểm)

d) Giải phương trình $(x^2 - x + 1)(x^2 + 4x + 1) = -4x^2$

Với $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Với $x \neq 0$ chia 2 vế của phương trình cho x^2 ta được :

$$(1) \Leftrightarrow \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) \left(x + 4 + \frac{1}{x}\right) = -4. \text{ Đặt } \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = a, \text{ phương trình trở thành}$$

$$a(a + 5) = -4 \Leftrightarrow a^2 + 5a + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} - 1 = -1 \\ x + \frac{1}{x} - 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 (VN) \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} (tmdk) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e) Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} - 2\sqrt{15+2x-x^2} = -4$ (2)

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ 15+2x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5, \text{ Đặt } t = \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} (t \geq 0)$$

Ta có $t^2 = 8 + 2\sqrt{15+2x-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{15+2x-x^2} = t^2 - 8$. Phương trình (2) trở thành $t - (t^2 - 8) = -4 \Leftrightarrow t^2 - t - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4(tm) \\ t = -3(ktm) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} = 4 \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1(tm)$$

$$\text{Vậy } x = 1$$

f) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 3x = 14y (1) \\ (x^2 + 3x)(x + y - 3) = 18y (2) \end{cases}$$

$$\text{Với } y = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\text{Với } y \neq 0, \text{ chia cả 2 vế phương trình cho } y \text{ ta được : } \begin{cases} \frac{x^2 + 3x}{y} + (x + y) = 14 \\ \frac{x^2 + 3x}{y} (x + y - 3) = 18 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \frac{x^2+3x}{y} = a \\ x+y-3 = b \end{cases}, \text{ hệ phương trình trở thành } \begin{cases} a+b=11 \\ ab=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=2 \\ b=9 \end{cases}$$

$$*) \begin{cases} a=2 \\ b=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2+3x}{y} = 2 \\ x+y-3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-24=0 \\ y=12-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3; y=9 \\ x=-8; y=20 \end{cases}$$

$$*) \begin{cases} a=9 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+3x}{y} = 9 \\ x+y-3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+12x-45=0 \\ y=5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \Rightarrow y=2 \\ x=-15 \Rightarrow y=20 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 6 nghiệm

$(0;0); (-3;0); (3;9); (-8;20); (3;2); (-15;20)$

Câu 2. (1,5 điểm)

c) **Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + 3pq + 4q^2$ là một số chính phương**

Giả sử (p, q) là cặp số nguyên tố sao cho luôn tồn tại số nguyên dương r thỏa mãn

$$p^2 + 3pq + 4q^2 = r^2 \quad (1)$$

Giả sử p, q đều khác 3. Ta có :

$p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod{3}$ nên $r^2 = p^2 + 3pq + 4q^2 \equiv p^2 + q^2 \equiv 2 \pmod{3}$ (vô lý vì số chính phương chia cho 3 khác 2)

Do đó $p \equiv 3$ hoặc $q \equiv 3$ mà p, q là số nguyên tố nên $\begin{cases} p=3 \\ q=3 \end{cases}$

Nếu $p=3$ thay vào (1) ta được :

$$r^2 = 4q^2 + 9q + 9 < 4p^2 + 12p + 9 = (2q+3)^2$$

$$\text{Mặt khác } r^2 = 4q^2 + 9q + 9 < 4q^2 + 8q + 4 = (2q+2)^2$$

$$\text{Nên } (2q+3)^2 > r^2 > (2q+2)^2$$

Điều này vô lý nên trường hợp này không có giá trị r thỏa mãn

$$\text{Nếu } q=3 \text{ thay vào (1) ta được : } r^2 = p^2 + 9p + 36 < p^2 + 12p + 36 = (p+6)^2$$

$$r^2 = p^2 + 9p + 36 > p^2 + 8p + 16 = (p+4)^2$$

$$\text{Nên } (p+4)^2 < r^2 < (p+6)^2, \text{ do đó } r^2 = (p+5)^2$$

$$\Leftrightarrow p^2 + 9p + 36 = p^2 + 10p + 25 \Leftrightarrow p = 11 \text{ (tm)}$$

Vậy $p=11; q=3$

d) **Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tồn tại các số tự nhiên x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 - 6xy = p - 8$**

Với các số x, y, p thỏa mãn giả thiết, ta có :

$$x^3 + y^3 - 6xy = p - 8 \Leftrightarrow (x + y)^3 - 3xy(x + y) - 6xy = p - 8$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^3 + 8 - 3xy(x + y + 2) = p \Leftrightarrow (x + y)^3 + 8 - 3xy(x + y + 2) = p$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 2) \left[(x + y)^2 - (x + y) \cdot 2 + 4 - 3xy \right] = p$$

$$(x + y + 2)(x^2 + y^2 + 4 - xy - 2x - 2y) = p(*)$$

$$\Rightarrow x + y + 2; x^2 + y^2 + 4 - xy - 2x - 2y \text{ là ước của } p$$

$$U(p) = \{\pm 1; \pm p\}$$

Do x, y nguyên dương nên $x + y + 2 > 2$, mặt khác p nguyên tố nên ta có :

$$\begin{cases} x + y + 2 = p(1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4 - xy - 2x - 2y = 1(2) \end{cases}$$

Xét phương trình $x^2 + y^2 + 4 - xy - 2x - 2y = 1$

$$2x^2 + 2y^2 + 8 - 2xy - 4x - 4y = 2 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$$

Vì x, y có vai trò như nhau nên giả sử $x \geq y$

Mà $2^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2$; x, y là các số nguyên và $x \geq y$ nên xảy ra các trường hợp sau :

$$th1: \begin{cases} (x - y)^2 = 1 \\ (x - 2)^2 = 1 \\ (y - 2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \pm 1 \\ x - 2 = \pm 1 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \pm 1 \\ x = 3 \\ x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 1; y = 2 \Rightarrow p = 5$$

$$\text{Với } x = 3; y = 2 \Rightarrow p = 7$$

Hai trường hợp còn lại làm tương tự cũng cho ra $\begin{cases} p = 5 \\ p = 7 \end{cases}$

$$\text{Vậy } p \in \{5; 7\}$$

Câu 3. (1,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 3$. Chứng minh rằng :

$$a) a + b + c \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ta có : } (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq (a + b + c)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3}$$

Mặt khác: $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 3$

$$\Leftrightarrow 6 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{3} + (a+b+c)^2 = \frac{4}{3}(a+b+c)^2 \Leftrightarrow a+b+c \leq \sqrt{\frac{6.3}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$b) \frac{2ab+3}{(a+b)^2} + \frac{2bc+3}{(b+c)^2} + \frac{2ca+3}{(c+a)^2} \geq 6 \quad (1)$$

Từ giả thiết ta có :

$$\frac{2ab+3}{(a+b)^2} \geq \frac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2 + (c+b)(c+a)}{(a+b)^2} = 1 + \frac{(b+c)(c+a)}{(a+b)^2}$$

Tương tự ta có :

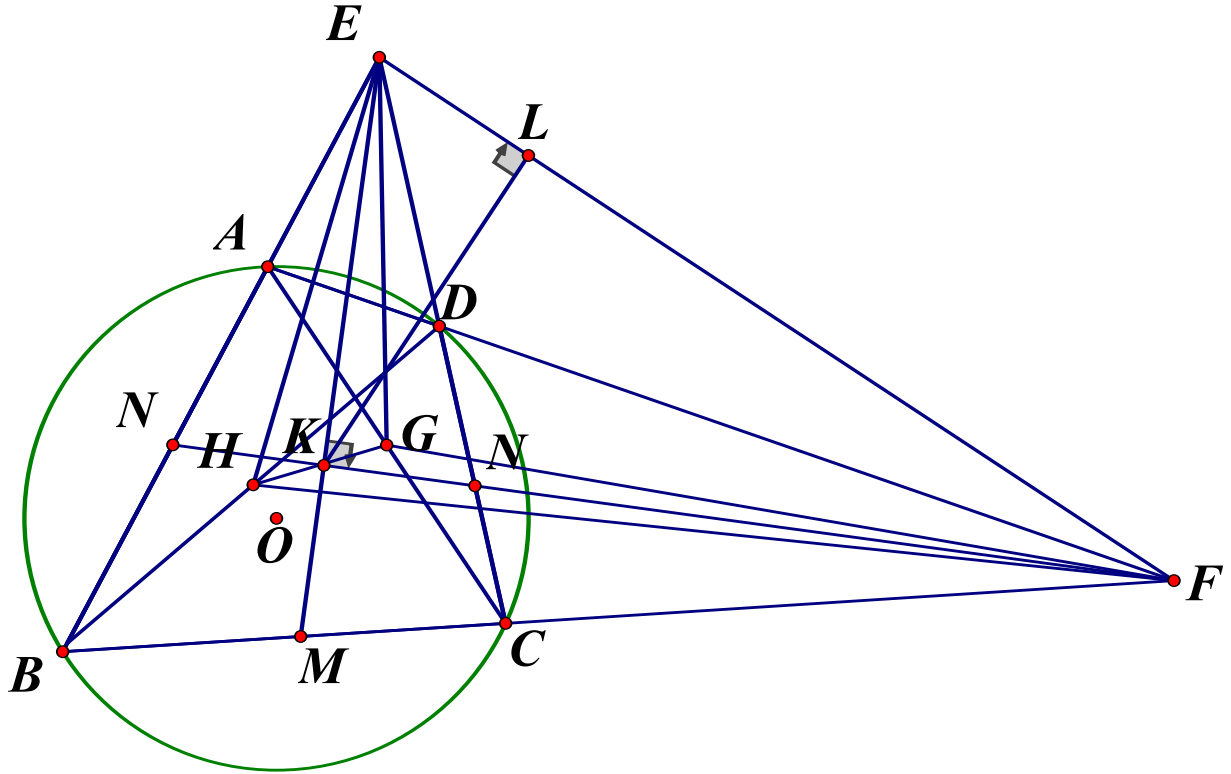
$$\frac{2bc+3}{(b+c)^2} \geq 1 + \frac{(c+a)(a+b)}{(b+c)^2}; \quad \frac{2ca+3}{(c+a)^2} \geq 1 + \frac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2}. \text{ Do đó :}$$

$$VT(1) \geq 3 + \frac{(b+c)(c+a)}{(a+b)^2} + \frac{(c+a)(a+b)}{(b+c)^2} + \frac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2}$$

$$\geq 3 + \sqrt[3]{\frac{(b+c)(c+a)}{(a+b)^2} \cdot \frac{(c+a)(a+b)}{(b+c)^2} \cdot \frac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2}} = 6(dfcm)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) sao cho hai tia BA và CD cắt nhau tại điểm E . Hai tia AD, BC cắt nhau tại điểm F . Gọi G, H lần lượt là trung điểm của AC, BD . Đường phân giác của các góc $\angle BEC$ và $\angle AFB$ cắt nhau tại điểm K . Gọi L là hình chiếu vuông góc của K trên đường thẳng EF . Chứng minh rằng :



a) $\angle DEF + \angle DFE = \angle EBF$ và $KL = \sqrt{LE.LF}$

Theo tính chất tổng 3 góc trong tam giác, ta có : $\angle BEF + \angle BFE = 180^\circ - \angle EBF$
 $\angle BEC = 180^\circ - \angle EBC - \angle BCE$, $\angle AFB = 180^\circ - \angle ABF - \angle BAF$

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\angle BCE + \angle BAF = 180^\circ$

$$\angle DEF + \angle DFE = \angle BEF - \angle BEC + \angle BFE - \angle AFC$$

$$= (\angle BEF + \angle BFE) - \angle BEC - \angle AFB = (180^\circ - \angle EBF) - \angle BEC - \angle AFB$$

$$\angle BEC + \angle AFB = (180^\circ - \angle EBC - \angle BCE) + (180^\circ - \angle ABF - \angle BAF)$$

$$= 360^\circ - 2.\angle EBF - (\angle BCE + \angle BAF) = 360^\circ - 2\angle EBF - 180^\circ = 180^\circ - 2\angle EBF$$

$$\angle DEF + \angle DFE = (180^\circ - \angle EBF) + 2\angle EBF - 180^\circ = \angle EBF \text{ (đpcm)}$$

* $\angle EKF = 180^\circ - \angle KEF - \angle KFE$ (tính chất tổng ba góc của $\triangle KEF$)

$$= 180^\circ - (\angle KED + \angle DEF) - (\angle KDB + \angle DFE) = 180^\circ - \left(\frac{\angle BEC}{2} + \angle DEF \right) - \left(\frac{\angle AFB}{2} + \angle DFE \right)$$

Do đó $\triangle KEF$ vuông tại K , có KL là đường cao nên theo hệ thức ta được :

$$KL^2 = LE.LF \text{ suy ra } KL = \sqrt{LE.LF} \text{ (đpcm)}$$

$$= 180^\circ - \frac{\angle BEC + \angle AFB}{2} - (\angle DEF + \angle DFE) = 180^\circ - \frac{180^\circ - 2\angle EBF}{2} - \angle ADE$$

$$= 180^\circ - 90^\circ + \angle EBF - \angle EBF = 90^\circ$$

b) $\angle GED = \angle HEA$ và $EG.FH = EH.FG$

Xét $\triangle EAC$ và $\triangle EDB$ có :

$\angle BEC$ là góc chung, $\angle ECA = \angle EBD$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overline{AD}$)

$$\Rightarrow \triangle EAC \sim \triangle EDB (g.g) \Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{AE}{DE} \quad (1)$$

Mà $DH = \frac{1}{2}BD$, $AG = \frac{1}{2}AC$ (do H là trung điểm của BD; G là trung điểm của AC)

$$\text{Nên từ (1)} \Rightarrow \frac{AG}{DH} = \frac{AE}{DE}$$

Ta có $\angle BAC = \angle BDC$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overline{BC}$ của (O))

Mà $\angle EAC = 180^\circ - \angle BAC$; $\angle BDE = 180^\circ - \angle BDC$ (kề bù) nên

$$\angle EAC = 180^\circ - \angle BAC; \angle BDE = 180^\circ - \angle BDC \text{ (kề bù) nên } \angle EAC = \angle BDE$$

Xét $\triangle EAG$ và $\triangle EDH$ có :

$$\angle EAG = \angle EDH (cmt); \frac{AG}{DH} = \frac{AE}{DE} (cmt) \Rightarrow \triangle EAG \sim \triangle EDH (g.g) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \angle GEA = \angle HED \Rightarrow \angle GEA + \angle HEG = \angle HED + \angle HEG \Rightarrow \angle GED = \angle HEA (dpcm)$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow \frac{EG}{EH} = \frac{AE}{DE} = \frac{AC}{BD}. \text{ Tương tự ta có: } \frac{FG}{FH} = \frac{AC}{BD}$$

$$\text{Do đó } \frac{EG}{EH} = \frac{FG}{FH} \Rightarrow EG.FH = EH.FG (dfcm)$$

c) $\frac{MB}{MC} + \frac{NB}{NA} = 2 \cdot \frac{KH}{KG}$; trong đó M là giao điểm của hai đường thẳng EK và BC, N

là giao điểm của hai đường thẳng FK và AB

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow \angle AEG = \angle DEH$$

EK là tia phân giác của $\angle BEC$ nên $\angle AEK = \angle DEK$

$$\Rightarrow \angle AEG - \angle AEK = \angle DEH - \angle DEK \Rightarrow \angle HEK = \angle GEK$$

$\Rightarrow EK$ là tia phân giác của $\angle GEH$. Tương tự FK là tia phân giác của $\angle GKH$

Gọi K' là giao điểm của EK, GH . Theo tính chất đường phân giác, ta có :

$$\frac{K'G}{K'H} = \frac{EG}{EH} = \frac{FG}{FH}$$

$$\triangle HFG \text{ có } \frac{K'G}{K'H} = \frac{FG}{FH} \text{ nên } FK' \text{ là đường phân giác của } \angle GFH$$

Do đó K' là giao ba đường phân giác $\triangle DEF \Rightarrow K \equiv K' \Rightarrow H, K, G$ thẳng hàng

$$\triangle BEC \text{ có } \frac{MB}{MC} = \frac{EB}{EC} \text{ (theo tính chất đường phân giác)}$$

$\triangle EBC$ và $\triangle EDA$ có $\angle BEC$ chung và $\angle EBC = \angle ADC$ (cùng bù $\angle ADC$)

$$\Rightarrow \triangle EBC \sim \triangle EDA(g.g) \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{ED}{EA}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{ED}{EA} = \frac{EH}{EG}$$

$$\triangle HEG \text{ có } \frac{EH}{EG} = \frac{KH}{KG} \text{ (theo tính chất đường phân giác)} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{KH}{KG}$$

$$\text{Tương tự ta có : } \frac{NB}{NA} = \frac{KH}{KG} \Rightarrow \frac{MB}{MC} + \frac{NB}{NA} = 2 \cdot \frac{KH}{KG} \text{ (đpcm)}$$

Câu 5. (1,0 điểm) Thầy Hùng viết các số nguyên 1; 2; 3; ...; 2021; 2022 lên bảng.

Thầy Hùng xóa đi 1010 số bất kỳ trên bảng. Chứng minh rằng trong các số còn lại trên bảng luôn tìm được:

c) 3 số có tổng các bình phương là hợp số

Dãy các số nguyên 1; 2; 3; ...; 2021; 2022 có 1011 số chẵn và 1011 số lẻ

Nếu xóa đi 1010 số lẻ thì trên bảng còn 1011 số chẵn. Chọn ra 3 số chẵn bất kỳ trong các số chẵn còn lại thì tổng các bình phương của ba số này là 1 số chẵn

Nếu xóa đi 1010 số chẵn thì trên bảng còn 1 số chẵn. Chọn ra số chẵn đó và 2 số lẻ bất kỳ còn lại thì tổng các bình phương 3 số này là 1 số chẵn

Tổng các bình phương của ba số chia hết cho 2 và lớn hơn 2 nên tổng này là hợp số

d) 504 số có tổng các bình phương chia hết cho 4

Các số chính phương lẻ chia 4 dư 1. Các số chính phương chẵn chia hết cho 4

Tổng 504 số chính phương lẻ chia hết cho 4

Sau khi xóa 1010 số trên bảng thì còn lại 1012 số

+Nếu trong 1012 số này có 504 số lẻ thì 504 số này có tổng các bình phương chia hết cho 4.

+Nếu trong 1012 số trên có ít hơn 504 số lẻ thì có ít nhất 506 số chẵn. 506 số chẵn này có tổng các bình phương chia hết cho 4. (đpcm)