

Câu 1 (4,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $2a^2 + 3b^2 + 6c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{4a+2} + \frac{1}{9b+3} + \frac{1}{36c+6} < 1.$$

Ý	Nội dung	Điểm
4,0đ	+ Từ $a, b, c > 0$ suy ra $\frac{1}{4a+2} < \frac{1}{2}, \frac{1}{9b+3} < \frac{1}{3}, \frac{1}{36c+6} < \frac{1}{6}$. Do đó $\frac{1}{4a+2} + \frac{1}{9b+3} + \frac{1}{36c+6} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.	1,0
	+ Ta có $\frac{1}{4a+2} + \frac{1}{9b+3} + \frac{1}{36c+6} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{a + \frac{1}{2}} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{b + \frac{1}{3}} + \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{c + \frac{1}{6}}$ $\geq \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)^2}{a + \frac{1}{2} + b + \frac{1}{3} + c + \frac{1}{6}} = \frac{1}{a+b+c+1}.$	1,0
	Mặt khác $2a^2 + 3b^2 + 6c^2 = \frac{a^2}{\frac{1}{2}} + \frac{b^2}{\frac{1}{3}} + \frac{c^2}{\frac{1}{6}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = (a+b+c)^2$, suy ra $1 \geq (a+b+c)^2$ hay $a+b+c \leq 1$.	1,0
	Suy ra $\frac{1}{4a+2} + \frac{1}{9b+3} + \frac{1}{36c+6} \geq \frac{1}{a+b+c+1} \geq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Vậy bất đẳng thức $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{4a+2} + \frac{1}{9b+3} + \frac{1}{36c+6} < 1$ luôn đúng.	1,0

Câu 2 (4,0 điểm). Xét đa thức $P(x) = \sum_{i=0}^{2024} a_i x^i$ với các hệ số thực, có bậc bằng 2024 và có 2024 nghiệm thực phân biệt.

a) Giả sử $a_{2023} = 0$, hãy xét dấu của tích $a_{2024} \cdot a_{2022}$.

b) Gọi $k(P)$ là số lượng số $i \in \{0; 1; 2; \dots; 2024\}$ thỏa mãn $a_i = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất có thể có của $k(P)$ khi đa thức $P(x)$ thay đổi.

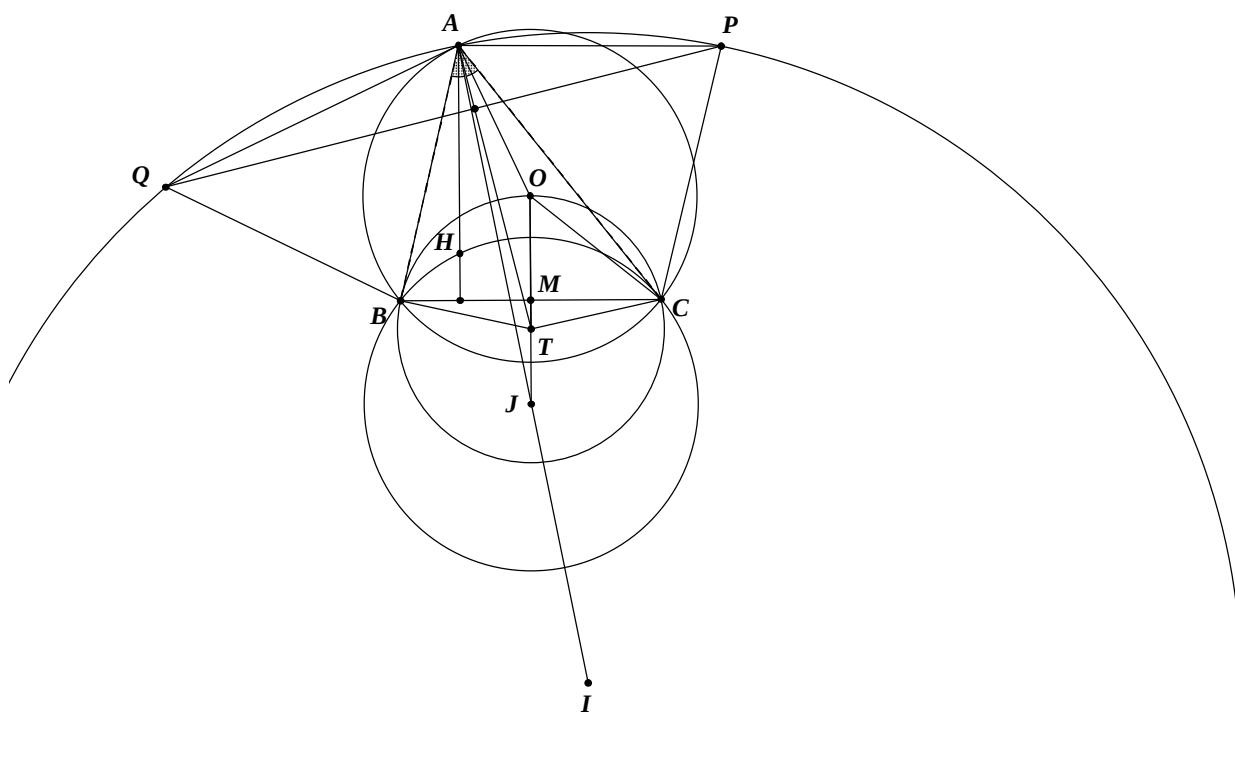
Ý	Nội dung	Điểm
2a 1,5đ	Xét $P(x) = \sum_{i=0}^{2024} a_i x^i$ có 2024 nghiệm thực là $x_1, \dots, x_{2024}$ với $a_{2024} \neq 0, a_{2023} = 0$. Theo định lí Viète, ta có $\begin{cases} \sum_{i=1}^{2024} x_i = -\frac{a_{2023}}{a_{2024}} = 0 \\ \sum_{1 \leq i < j \leq 2024} x_i x_j = \frac{a_{2022}}{a_{2024}}. \end{cases}$	0,5
	Suy ra $\sum_{i=1}^{2024} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{2024} x_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2024} x_i x_j = -2 \cdot \frac{a_{2022}}{a_{2024}}$.	0,5
	Do các nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$ là số thực và đôi một phân biệt nên phải có $\sum_{i=1}^{2024} x_i^2 > 0$. Suy ra $-2 \cdot \frac{a_{2022}}{a_{2024}} > 0$ hay tích $a_{2024} \cdot a_{2022}$ âm.	0,5
2b 2,5đ	* Bổ đề: Giả sử đa thức $Q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ có bậc là $n \geq 2$, có n nghiệm thực và có số tự nhiên t mà $t < n-1, b_t = b_{t+1} = 0$. Khi đó $b_0 = b_1 = \dots = b_t = b_{t+1} = 0.$ Chứng minh: Ta sử dụng phương pháp quy nạp theo số nguyên dương n. + Với $n = 2$, khi đó $t < n-1 = 1$ nên $t = 0$. Hiển nhiên có $b_0 = b_1 = 0$. + Giả sử bổ đề đúng cho mọi đa thức bậc $n-1$ (với các điều kiện đi kèm), bây giờ ta xét đa thức $Q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ có bậc là $n \geq 2$, có n nghiệm thực và có số tự nhiên t mà $t < n-1, b_t = b_{t+1} = 0$; cần chứng minh $b_0 = b_1 = \dots = b_t = b_{t+1} = 0$. Nếu $t = 0$ thì kết quả là hiển nhiên. Nếu $1 \leq t < n-2$ thì xét đa thức $Q'(x) = \sum_{i=1}^n i b_i x^{i-1}$ có bậc là $n-1$ và có $n-1$ nghiệm thực (theo định lí Rolle), có $t b_t = (t+1) b_{t+1} = 0$. Sử dụng giả thiết quy nạp thu được $b_1 = b_2 = \dots = b_{t+1} = 0$. Giả sử có $b_0 \neq 0$, dùng định lí Viète cho đa thức $Q(x) = b_n x^n + \dots + b_{t+2} x^{t+2} + b_0$ với n nghiệm thực khác 0 là $r_1, \dots, r_n$ thu được	1,0

	$\sum_{i=1,n} \left(\frac{1}{r_i} \right)^2 = \left(\sum_{i=1,n} \frac{1}{r_i} \right)^2 - 2 \left(\sum_{i < j} \frac{1}{r_i} \cdot \frac{1}{r_j} \right) = 0^2 - 0 = 0,$ điều này không xảy ra. Vậy có $b_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_{t+1} = 0$. Nếu $t = n - 2$ thì xảy ra $b_{n-2} = b_{n-1} = 0$. Làm tương tự bằng định lý Viete có $\sum_{i=1,n} r_i^2 = 0$, suy ra $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$. Vậy có $Q(x) = b_n(x - 0)^n$ nên $b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$. Tóm lại trong mọi trường hợp đều có $b_0 = b_1 = \dots = b_t = b_{t+1} = 0$. Theo nguyên lý quy nạp có Bổ đề được chứng minh xong.	
	* Quay lại bài toán, $P(x)$ không thể có hai hệ số liên kề nào cùng bằng 0. Thật vậy, nếu có t mà $a_t = a_{t+1} = 0$ thì theo Bổ đề phải có $a_0 = a_1 = \dots = a_{t+1} = 0$, suy ra $P(x)$ nhận $x = 0$ là nghiệm bội với số bội không nhỏ hơn $t + 2$, mâu thuẫn giả thiết về $P(x)$. + $P(x)$ có 2025 hệ số là $a_0, \dots, a_{2024}$ (ở đó đã có $a_{2024} \neq 0$) nên $k(P) \leq \frac{2024}{2} = 1012$.	0,5
	+ Chọn $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2) \dots (x^2 - 1012)$ là đa thức thỏa mãn các yêu cầu của đề bài và có $k(P) = 1012$. Vậy giá trị lớn nhất của $k(P)$ là 1012.	0,5
	* Dễ thấy $k(P)$ là số tự nhiên nên $k(P) \geq 0$. Chọn $P(x) = (x - 1)(x - 2) \dots (x - 2024)$ thì $k(P) = 0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $k(P)$ là 0.	0,5

Câu 3 (4,0 điểm). Cho đường tròn (O) cố định và dây cung BC cố định, không là đường kính của (O) . Điểm A di động trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Các điểm T và J là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC và BHC .

a) Chứng minh khi A di động thì $OT.OJ$ không đổi.

b) Gọi P là điểm đối xứng của B qua đường thẳng AC , Q là điểm đối xứng của C qua đường thẳng AB . Lấy I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ . Chứng minh khi A di động thì đường thẳng AI luôn đi qua một điểm cố định.



Ý	Nội dung	Điểm
3a 2,0đ	Các điểm O, T, J cùng thuộc trung trực của BC . Gọi M là trung điểm của BC thì M là trung điểm của OJ .	0,5
	Ta có $\widehat{TOC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = \widehat{BAC}$. Xét tam giác OTC cân tại T có $OT = \frac{OC}{2 \cdot \cos \widehat{TOC}} = \frac{OC}{2 \cdot \cos \widehat{BAC}}$.	0,5
	Tam giác OMC vuông tại M nên $OM = OC \cdot \cos \widehat{BAC}$.	0,5
	Suy ra $OT \cdot OM = \frac{OC^2}{2}$ nên $OT \cdot OJ = OC^2$ không đổi, ta có Đpcm.	0,5
3b 2,0đ	Theo chứng minh trên, suy ra $OT \cdot OJ = OA^2$ nên $\triangle OAT \sim \triangle OJA$ nên $\widehat{OAT} = \widehat{OJA} = \widehat{HAJ}$. Có $\widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{AOC} = \widehat{OAC}$. Suy ra $\widehat{CAT} = \widehat{BAJ}$.	0,5
	Theo tính đối xứng suy ra $\widehat{QAJ} = \widehat{PAT}$ nên AT và AJ đẳng giác trong $\widehat{PAQ}$. Ta có $AP^2 - AQ^2 = AB^2 - AC^2 = 4R^2 (\sin^2 \widehat{B} - \sin^2 \widehat{C})$ $= 4R^2 (\sin \widehat{B} - \sin \widehat{C})(\sin \widehat{B} + \sin \widehat{C})$	0,5

	$= 4R^2 \cdot 2 \cos \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \cdot \sin \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} \cdot 2 \sin \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \cdot \cos \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = 4R^2 \sin \widehat{A} \cdot \sin(\widehat{B} - \widehat{C})$ (trong đó R là bán kính đường tròn (O), kí hiệu $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ là các góc BAC, CBA, ACB).	
	Ta có $PT^2 - QT^2 = (CP^2 + CT^2 - 2.CP.CT.\cos\widehat{PCT}) - (BQ^2 + BT^2 - 2.BQ.BT.\cos\widehat{QBT})$ $= 2.BT.BC(\cos\widehat{QBT} - \cos\widehat{PCT}).$ Ta có $BT = OT = \frac{R}{2.\cos\widehat{A}}$ và $BC = 2R.\sin\widehat{A}$. $\widehat{QBT} = 2\widehat{B} + \widehat{TBC} = 2\widehat{B} + 90^\circ - \widehat{BTC} = 2\widehat{B} + 2\widehat{BOC} - 90^\circ = 2\widehat{B} + 2\widehat{A} - 90^\circ$ Suy ra $\cos\widehat{QBT} = \cos(2\widehat{B} + 2\widehat{A} - 90^\circ) = \sin(2\widehat{B} + 2\widehat{A}) = \sin 2\widehat{C}$ Tương tự có $\cos\widehat{PCT} = \sin 2\widehat{B}$. Suy ra $PT^2 - QT^2 = 2R^2 \frac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}} (\sin 2\widehat{C} - \sin 2\widehat{B})$ $= 2R^2 \frac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}} \cdot 2.\cos(\widehat{C} + \widehat{B})\sin(\widehat{C} - \widehat{B})$ $= -4R^2 \frac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}} \cdot \cos\widehat{A} \cdot \sin(\widehat{C} - \widehat{B}) = 4R^2 \sin\widehat{A} \cdot \sin(\widehat{B} - \widehat{C}).$	0,5
	Suy ra $AP^2 - AQ^2 = PT^2 - QT^2$ theo định lý 4 điểm ta có AT vuông góc với PQ. Suy ra AJ đi qua tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác AQP hay AI đi qua J cố định.	0,5

Câu 4 (4,0 điểm). Cho số nguyên tố lẻ p và xét số nguyên dương n thay đổi thỏa mãn: Với mỗi số nguyên dương $a > 1$, nếu a không chia hết cho p thì tổng các ước nguyên dương khác 1 của a^n chia hết cho p^{2024} .

a) Chứng minh n chia hết cho p và $p-1$.

b) Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Ý	Nội dung	Điểm
4a	Theo định lý Dirichlet, tồn tại số nguyên tố a mà $a \equiv 1 \pmod{p^{2024}}$.	0,5

2,0đ	Chú ý, các ước nguyên dương lớn hơn 1 của a^n là $a, a^2, a^3, \dots, a^n$ nên $a + a^2 + \dots + a^n$ chia hết cho p^{2024} , suy ra n chia hết cho p^{2024} .	0,5
	Do p nguyên tố nên tồn tại g là căn nguyên thủy mod p , theo định lý Dirichlet, tồn tại số nguyên tố b mà $b \equiv g \pmod{p}$.	0,5
	Theo giả thiết ta có $b + b^2 + \dots + b^n = b(1 + b + \dots + b^{n-1}) = b \frac{b^n - 1}{b - 1}$ chia hết cho p . Do $g \neq 0, 1$ nên $(b, p) = (b - 1, p) = 1$, suy ra $b^n - 1$ chia hết cho p . Suy ra $g^n - 1 \equiv b^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, suy ra n chia hết cho $p - 1$. (do $p - 1 = \text{ord}_p(g)$)	0,5
4b 2,0đ	Theo câu a suy ra $n \geq p^{2024} \cdot (p - 1)$.	0,25
	Chứng minh $n = p^{2024} \cdot (p - 1)$ là số thỏa mãn. Xét số nguyên dương a mà $(a, p) = 1$. Viết $a = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i}$ trong đó $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ là các số nguyên tố và $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$ là các số nguyên dương, suy ra $a^n = \prod_{i=1}^s p_i^{n\alpha_i}$ Ta cần chứng minh $\prod_{i=1}^s (1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{n\alpha_i}) \equiv 1 \pmod{p^{2024}}$.	0,25
	Do $(a, p) = 1$ nên $(p, p_i) = 1, \forall i = 1, 2, \dots, s$. +) Nếu p không chia hết $p_i - 1$ thì $p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{n\alpha_i} = \frac{p_i(p_i^{n\alpha_i} - 1)}{p_i - 1}$ Chú ý $\varphi(p^{2024}) = p^{2024} - p^{2023} = \frac{n}{p}$ hay $n = p \cdot \varphi(p^{2024})$, suy ra $p_i^{n\alpha_i} - 1 \equiv p_i^{\alpha_i p \cdot \varphi(p^{2024})} - 1 \equiv (p_i^{p \cdot \alpha_i})^{\varphi(p^{2024})} - 1 \equiv 0 \pmod{p^{2024}}$. Suy ra $1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{n\alpha_i} \equiv 1 \pmod{p^{2024}}$.	0,5
	+) Nếu p chia hết $p_i - 1$, áp dụng bổ đề LTE ta có $v_p(p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{n\alpha_i}) = v_p\left(\frac{p_i(p_i^{n\alpha_i} - 1)}{p_i - 1}\right) = v_p(p_i^{n\alpha_i} - 1) - v_p(p_i - 1)$ $= v_p(p_i - 1) + v_p(n\alpha_i) - v_p(p_i - 1) = v_p(n\alpha_i) \geq 2024,$ suy ra $1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{n\alpha_i} \equiv 1 \pmod{p^{2024}}$.	0,5
	Vậy luôn có $1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{n\alpha_i} \equiv 1 \pmod{p^{2024}}, \forall i = 1, 2, \dots, s$.	0,5

	Suy ra $\prod_{i=1}^s (1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{n\alpha_i}) \equiv 1 \pmod{p^{2024}}$. Ta có điều phải chứng minh. Vậy số n nhỏ nhất là $n = p^{2024} \cdot (p-1)$.	
--	--	--

Câu 5 (4,0 điểm). Giả sử S là tập hợp hữu hạn các điểm mà mỗi điểm của nó được tô bởi một trong hai màu đỏ hoặc xanh (điểm được tô màu đỏ gọi là điểm đỏ, điểm được tô màu xanh gọi là điểm xanh). Gọi $A_1, A_2, \dots, A_{68}$ là các tập con của tập S mà mỗi tập chứa đúng năm điểm và thỏa mãn đồng thời các điều kiện (i) và (ii) sau đây:

- (i) Mỗi tập trong các tập $A_1, A_2, \dots, A_{68}$ chứa ít nhất một điểm đỏ;
(ii) Với ba điểm bất kì trong tập S , tồn tại duy nhất $i \in \{1; 2; \dots; 68\}$ mà tập A_i chứa cả ba điểm đó.
- a) Tìm số phần tử của tập S .
b) Tồn tại hay không số $k \in \{1; 2; \dots; 68\}$ mà tập A_k chứa bốn hoặc năm điểm đỏ?

Ý	Nội dung	Điểm
5a 2,0đ	Đặt $n = S $. Khi đó số tập con có 3 phần tử của tập S là C_n^3 .	0,5
	Với mỗi $i \in \{1; 2; \dots; 68\}$ thì số tập con có 3 phần tử của tập A_i là C_5^3 .	0,5
	Từ đó ta suy ra $68C_5^3 = C_n^3 \Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 680$.	0,5
	$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 4080 \Leftrightarrow n = 17$. Vậy $ S = 17$.	0,5
5b 2,0đ	+) Giả sử không tồn tại $k \in \{1; 2; \dots; 68\}$ mà tập A_k chứa bốn hoặc năm điểm đỏ. Khi đó với mọi $k \in \{1; 2; \dots; 68\}$ thì tập A_k chứa tối đa 3 điểm đỏ. +) Gọi B là tập hợp các tập con có 3 phần tử của tập S mà mỗi tập con đó chứa một điểm đỏ và 2 điểm xanh. Ta gọi các tập hợp có 3 phần tử như vậy là tập đỏ. Ta tính $ B $ theo 2 cách. Giả sử trong tập S có r điểm đỏ. Khi đó do $ S = 17$ nên $ B = C_r^1 \cdot C_{17-r}^2$ (1)	0,5
	+) Mặt khác, với mọi bộ 3 điểm đỏ thì tồn tại duy nhất $i \in \{1; 2; \dots; 68\}$ mà tập A_i chứa cả ba điểm đỏ này, suy ra trong tập A_i này chứa đúng 2 điểm xanh nên số tập đỏ trong A_i là $C_3^1 \cdot C_2^2 = 3$. Số tập A_i chứa 3 điểm đỏ là C_r^3 nên số tập đỏ trong trường hợp này là $3 \cdot C_r^3$.	0,5
	+) Số tập A_i chứa 1 hoặc 2 điểm đỏ là $68 - C_r^3$. Nếu tập A_i chứa đúng 1 điểm đỏ thì số tập đỏ trong A_i là $1 \cdot C_4^2 = 6$	0,5

	Nếu tập A_i chứa đúng 2 điểm đỏ thì số tập đỏ trong A_i là $C_2^1.C_3^2 = 6$. Suy ra số tập đỏ trong mỗi tập A_i chứa 1 hoặc 2 điểm đỏ là 6. Do đó số tập đỏ trong trường hợp này là $6.(68 - C_r^3)$. Suy ra $B = 3.C_r^3 + 6.(68 - C_r^3) = 408 - 3.C_r^3$ (2)	
	Từ (1) và (2) suy ra $408 - 3.C_r^3 = C_r^1.C_{17-r}^2 \Leftrightarrow r^3 - 18r^2 + 137r - 408 = 0$ (*) Ta thấy phương trình (*) không có nghiệm nguyên nên điều giả sử là sai. Vậy luôn tồn tại số $k \in \{1; 2; \dots; 68\}$ mà tập A_k chứa bốn hoặc năm điểm đỏ.	0,5

Chú ý:

- Nếu thí sinh làm đúng, cách giải khác với hướng dẫn chấm, phù hợp kiến thức của chương trình thì tổ chấm thống nhất cho điểm thành phần đảm bảo tổng điểm như hướng dẫn quy định.
- Tổng điểm toàn bài không làm tròn.

----- HẾT -----