

Câu 1 (5 điểm). Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho tồn tại đa thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

(i) bộ các hệ số $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$ là một hoán vị của $(0, 1, 2, \dots, n)$;

(ii) $P(x)$ có đủ n nghiệm hữu tỷ.

Lời giải.

Vì các hệ số của $P(x)$ đều là các số không âm nên các nghiệm của nó sẽ là các số không dương. Vì vậy ta có thể giả sử

$$P(x) = \prod_{k=1}^n (b_k x + c_k); \quad b_k, c_k \in \mathbb{N}, b_k > 0.$$

Nếu có nhiều hơn một số $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ mà $c_k = 0$ thì $P(x) = x^2 Q(x)$. Lúc này, $a_1 = a_0 = 0$ sẽ vi phạm điều kiện (i). Do đó có nhiều nhất là một số $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ mà $c_k = 0$. Vì vậy,

$$\prod_{k=1}^n (b_k + c_k) \geq 2^{n-1}.$$

Lại có,

$$\prod_{k=1}^n (b_k + c_k) = P(1) = \sum_{i=0}^n a_i = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} &\geq 2^{n-1} \\ \Rightarrow n(n+1) &\geq 2^n. \end{aligned}$$

Bằng qui nạp ta chứng minh được

$$2^n > n(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5.$$

Do đó, ta đánh giá được $n \leq 4$.

Xét $n = 4$, ta có

$$\prod_{k=1}^4 (b_k + c_k) = 10 = 2 \cdot 5$$

Vì 10 không thể tách thành tích của ít nhất 3 số nguyên lớn hơn 1 nên trường hợp này không thể xảy ra.

Vậy $n \leq 3$.

Ta có đa thức bậc 3 thỏa yêu cầu đặt ra, chẳng hạn

$$P(x) = x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x$$

Vậy giá trị n lớn nhất là 3.

Câu 2 (5 điểm). Giả sử x, y là hai số bất kỳ thuộc tập hợp $\{2; 3; 4; 5; \dots; 2^{15}\}$. Chứng minh rằng, tồn tại số nguyên dương n sao cho $x^{2^n} + y^{2^n}$ là hợp số.

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp:

(1) Nếu $x = y$ thì không khó để ta chỉ được số nguyên dương n thỏa yêu cầu bài toán. Chẳng hạn, $n = 1$ thì

$$x^{2^n} + y^{2^n} = 2x^2$$

là hợp số với mọi $x \in \{2; 3; 4; 5; \dots; 2^{15}\}$

(2) Bây giờ là trường hợp $x \neq y$. Xét số nguyên tố Fermat,

$$p = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1.$$

Ta có

$$p \mid x^{p-1} - y^{p-1} = x^{2^{16}} - y^{2^{16}} = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) \cdots (x^{2^{15}} + y^{2^{15}}).$$

Lại vì,

$$\begin{cases} x \neq y \\ x, y \in \{2; 3; 4; 5; \dots; 2^{15}\} \end{cases}$$

nên

$$0 < |x \pm y| < p \Rightarrow \begin{cases} x - y \not\equiv p \\ x + y \not\equiv p \end{cases}$$

Suy ra,

$$\exists n \in \{1; 2; 3; \dots; 15\} : x^{2^n} + y^{2^n} \vdots p.$$

Bổ đề

Nếu số nguyên tố p được biểu diễn

$$p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$

với a, b, c, d là các số nguyên dương thì $\{a; b\} = \{c; d\}$.

Chứng minh bổ đề

Ta có

$$\begin{aligned} a^2c^2 - b^2d^2 &= a^2(c^2 + d^2) - d^2(a^2 + b^2) = p(a^2 - d^2) \\ &\Rightarrow p \mid a^2c^2 - b^2d^2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} p \mid (ac - bd) \\ p \mid (ac + bd) \end{cases} \end{aligned}$$

Ta xét hai trường hợp:

Nếu $p \mid (ac - bd)$ thì kết hợp với hằng đẳng thức Lagrange,

$$p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

suy ra

$$(ad + bc)^2 \vdots p^2 \Rightarrow (ad + bc)^2 \geq p^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \Rightarrow ac = bd.$$

Nhưng vì, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ là số nguyên tố nên $(a, b) = (c, d) = 1$. Do đó mà từ $ac = bd$ ta có thể viết lại cấu trúc các số là: $a = bt, d = ct$. Từ đó,

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow (t^2 + 1)b^2 = (t^2 + 1)c^2 \Rightarrow b = c$$

và tất nhiên cũng kéo theo $a = d$.

Trường hợp còn lại, ta có

$$p \mid ac + bd$$

$$\Rightarrow (ac + bd)^2 \geq p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$\Rightarrow ad = bc$$

Lý luận tương tự sẽ cho ta $a = c; b = d$.

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, nếu $x^{2^n} + y^{2^n} = p$ thì theo bổ đề sẽ có

$$p = x^{2^n} + y^{2^n} = 2^{16} + 1$$

$$\Rightarrow \{x^{2^{n-1}}; y^{2^{n-1}}\} = \{2^8; 1\}$$

là điều không thể vì x, y đều lớn hơn 1 và $n \geq 1$.

Vậy, $x^{2^n} + y^{2^n}$ là hợp số. □

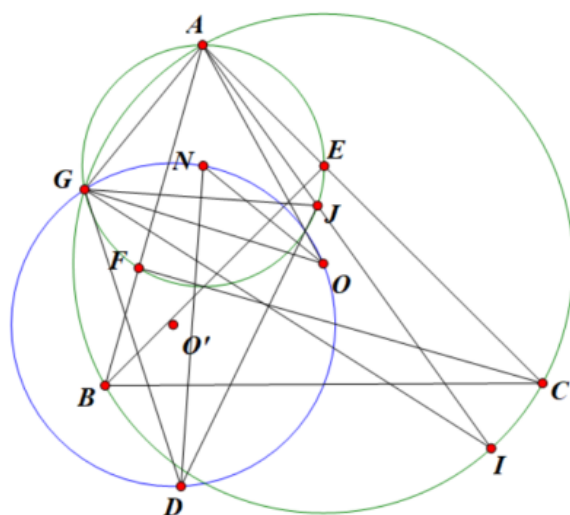
Câu 3 (5 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) có E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C lên các cạnh AC, AB . Gọi (ω) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Lấy điểm I bất kỳ thay đổi trên đường tròn (O) và J là giao điểm khác A của đường thẳng AI với (ω) . Gọi G là giao điểm khác A của (O) và (ω) .

- Chứng minh rằng, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác GJI luôn thuộc một đường tròn (O') cố định khi I thay đổi.
- Giả sử (O') cắt cạnh BC tại duy nhất một điểm M và MJ cắt (ω) tại P khác J . Chứng minh rằng, trực tâm K của tam giác PAJ luôn thuộc một đường tròn cố định khi I thay đổi.

Lời giải.

Chú ý. Với ba điểm không thẳng hàng X, Y, Z ta kí hiệu (XYZ) là đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z và (XY) là đường tròn đường kính XY .

Không mất tính tổng quát, ta xét thể hình dưới đây:



a) Gọi N, D lần lượt là tâm của các đường tròn (ω) và (GII) . Ta sẽ chỉ ra $D \in (ONG)$.

Ta có D là tâm (GIJ) nên

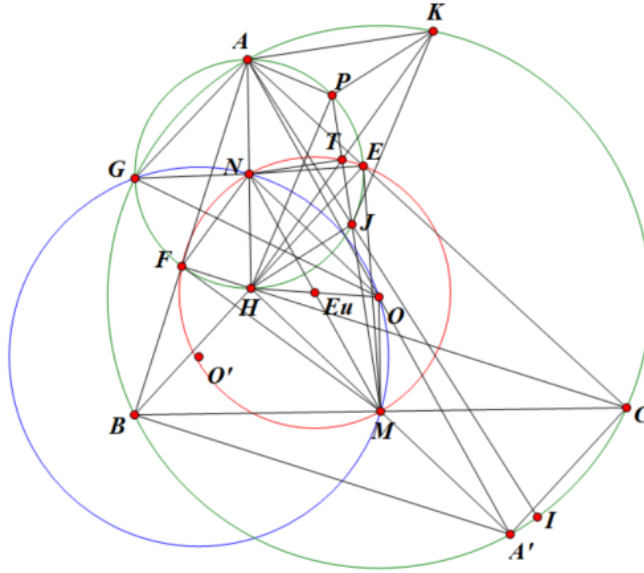
$$\angle GDN = \frac{1}{2}\angle GDJ = \angle GIJ.$$

Mà ON là trung trực của AG nên

$$\angle NOG = \frac{1}{2}\angle AOG = \angle GIA = \angle GIJ.$$

Vậy $\angle GDN = \angle NOG$, dẫn tới $D \in (GON)$. Do đó D luôn thuộc đường tròn $(GON) \equiv (O')$ cố định.

b)



Gọi H là trực tâm tam giác ABC và M' là trung điểm của đoạn BC . Ta sẽ chỉ ra $M \equiv M'$.

Kẻ đường kính AA' của (O) , ta có tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành nên M' cũng là trung điểm của HA' . Mặt khác O là trung điểm của AA' nên $OM' = \frac{1}{2}AH = AN$.

Vì $AN \parallel OM'$ nên suy ra $AOM'N$ là hình bình hành, dẫn đến $\angle NM'O = \angle NAO = \angle NGO$. Suy ra, M' thuộc (O') . Vậy M' là giao điểm của (O') với cạnh BC hay $M' \equiv M$.

Do K là trực tâm tam giác APJ và AH là đường kính của (ω) nên $PK \parallel HJ$ và $PH \parallel JK$. Vậy $PKJH$ là hình bình hành, dẫn đến hai đoạn HK và PJ có chung trung điểm T .

Suy ra $NT \perp PJ$ hay $\angle NTM = 90^\circ$. Do đó, T thuộc đường tròn đường kính MN - đó cũng là đường tròn Euler (Eu) của tam giác ABC .

Xét phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$ biến K thành T và biến đường tròn (O) thành đường tròn Euler (Eu) của tam giác ABC . Mà $T \in (MN) \equiv (Eu)$ nên $K \in (O)$.

Vây trục tâm K của tam giác PAJ luôn nằm trên đường tròn (O) cố định.

☐

Câu 4 (5 điểm). Xét trò chơi: Có một bảng vuông kích thước 10×10 , mỗi lần bấm nút **start** để bắt đầu chơi, máy tính sẽ tô màu ngẫu nhiên một số ô vuông đơn vị nào đó. Để thắng cuộc, người chơi được phép tô màu không quá 19 ô vuông đơn vị chưa được tô màu (có thể không cần phải tô ô nào) sao cho trên bảng vuông 10×10 đó, số ô vuông đơn vị được tô ở mỗi hàng cũng như ở mỗi cột đều là số chẵn (tính cả số 0). Em hãy chứng tỏ rằng, luôn có cách để thắng trò chơi này.

Lời giải.

Vì 10 là số chẵn nên phần bù của nó cũng là số chẵn. Tức ta cần tìm cách tô sao cho số ô không được tô ở mỗi hàng cũng như mỗi cột đều là số chẵn.

Xét đồ thị 20 đỉnh, gồm 10 đỉnh A_i đại diện cho 10 hàng và 10 đỉnh B_j đại diện cho 10 cột. Ta nối A_i với B_j nếu ô nằm ở hàng i , cột j không được tô màu.

Như vậy, ta cần phải xóa đi không quá 19 cạnh của đồ thị để mọi đỉnh của đồ thị thu được đều có bậc chẵn.

Bổ đề

Một đồ thị đơn, vô hướng n đỉnh. Ta có thể bỏ đi không quá $n - 1$ cạnh để đồ thị mới thu được có tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn.

Chứng minh bổ đề

Ta qui nạp theo số đỉnh.

Trường hợp đồ thị có 1, 2 hay 3 đỉnh đều có thể chỉ ra dễ dàng.

Với k là một số nguyên dương, giả sử rằng, mọi đồ thị đơn, vô hướng k đỉnh ta đều có thể bỏ đi không quá $k - 1$ cạnh để đồ thị mới thu được có tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn.

Xét đồ thị có $k + 1$ đỉnh. Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Trong đồ thị có đỉnh cô lập. Xét đồ thị con của đồ thị ban đầu khi ta bỏ đi một đỉnh cô lập nào đó của nó. Theo giả thiết qui nạp thì trong đồ thị mới này ta có thể chọn không quá $k - 1$ cạnh để bỏ đi và khi đó tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn. Trong đồ thị ban đầu ta cũng chỉ cần bỏ đi các cạnh như trong đồ thị mới sẽ được một đồ thị có tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn. Tất nhiên số cạnh phải bỏ không vượt $k - 1$.

Trường hợp 2. Trong đồ thị có đỉnh bậc 1. Xét đồ thị con của đồ thị ban đầu khi ta bỏ đi một đỉnh bậc 1 (cùng cạnh nối với đỉnh) nào đó của nó. Theo giả thiết qui nạp thì trong đồ thị mới này ta có thể chọn không quá $k - 1$ cạnh để bỏ đi và khi đó tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn. Trong đồ thị ban đầu, ta cũng bỏ đi các cạnh như trong đồ thị mới cộng thêm cạnh nối với đỉnh bậc 1 đang đề cập thì sẽ được một đồ thị có tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn. Tất nhiên số cạnh phải bỏ không vượt $k - 1 + 1 = k$.

Trường hợp 3. Mọi đỉnh của đồ thị đều có bậc từ 2 trở lên. Điểm đặc trưng của đồ thị loại này là nó có chu trình. Ta chọn ra một chu trình và bỏ tất cả các cạnh của chu trình. Việc làm này không làm thay đổi tính chẵn lẻ của bậc các đỉnh. Ta cứ lặp đi lặp lại việc này cho đến khi xuất hiện đỉnh bậc 1 hoặc cô lập thì sẽ chọn được đỉnh để thực hiện qui nạp (như hai trường hợp trên). Và lúc này ta trả lại tất cả các cạnh ban đầu đã xóa trong các chu trình. Việc trả lại các cạnh này không làm thay đổi tính chẵn lẻ của bậc ở các đỉnh vì ta trả lại số cạnh chẵn cho mỗi đỉnh.

Bổ đề đã được chứng minh.

Theo bổ đề này thì trong đồ thị đang xét của bài toán, ta có thể xóa không quá 19 cạnh để sao cho đồ thị thu được có mọi đỉnh đều bậc chẵn.

Bài toán đã được chứng minh. □

—Hết—

Thí sinh không sử dụng tài liệu, máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.