

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-8} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$. Rút gọn biểu thức

P và tìm giá trị của P tại $x = 14 + 6\sqrt{5}$

b) Tính giá trị biểu thức $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$

Câu 2. (1,0 điểm) Cho phương trình $x^2 + (m-2)x + m-3 = 0$ (x là ẩn số, m là tham số)
Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức

$A = 2x_1x_2 - (x_1 - x_2)^2 + 3$ đạt giá trị lớn nhất

Câu 3. (1,5 điểm)

a) Giải phương trình : $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = 5$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+3)(2x+y) = 30 \\ x^2 + 5x + y = 13 \end{cases}$

Câu 4. (1,5 điểm)

a) Cho $A = 2(1^{2023} + 2^{2023} + \dots + 2022^{2023})$. Chứng minh rằng $A : 2022$

b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $2x^2 + 5y^2 + 4x = 21$

Câu 5. (2,0 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi H là điểm thuộc đoạn thẳng AO ($H \neq A; H \neq O$). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với AB, đường thẳng này cắt đường tròn (O) tại C và D. Hai đường thẳng BC và AD cắt nhau tại M. Gọi N là hình chiếu của M lên đường thẳng AB

a) Chứng minh $\angle ACN = \angle AMN$

b) Chứng minh $CH^2 = NH.OH$

c) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt NC tại E. Chứng minh đường thẳng EB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH

Câu 6. (1,0 điểm) Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O; R), trên dây cung DC lấy điểm E sao cho $DC = 3DE$, đường thẳng AE cắt cung nhỏ DC tại M. Gọi I là giao điểm của BM và DC, vẽ OH vuông góc với DM tại H. Tính độ dài các đoạn thẳng AE và DI theo R

Câu 7. (1,0 điểm) Cho hai số thực không âm a, b

a) Chứng minh $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$

b) Biết $a^2 + b^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2ab}{a+b+2}$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

c) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-8} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$. Rút gọn biểu

thức P và tìm giá trị của P tại $x = 14 + 6\sqrt{5}$

Với $x > 0; x \neq 4$ ta có :

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-8} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}} = \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} - \frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} \right] \cdot \sqrt{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} \cdot \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+4} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } x = 14 + 6\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(3+\sqrt{5})^2} = 3 + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow P = \frac{3 + \sqrt{5}}{14 + 6\sqrt{5} + 6 + 2\sqrt{5} + 4} = \frac{1}{8}$$

d) Tính giá trị biểu thức $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$

$$\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 2$$

Câu 2. (1,0 điểm) Cho phương trình $x^2 + (m-2)x + m-3 = 0$ (x là ẩn số, m là tham số) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức

$$A = 2x_1x_2 - (x_1 - x_2)^2 + 3 \text{ đạt giá trị lớn nhất}$$

$$\text{Ta có } \Delta = (m-2)^2 - 4(m-3) = m^2 - 8m + 16 = (m-4)^2 \geq 0$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

$$\text{Theo định lý Vi-et ta có : } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - m \\ x_1x_2 = m - 3 \end{cases}$$

$$A = 2x_1x_2 - (x_1 - x_2)^2 + 3 = 6x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2 + 3 = -m^2 + 10m - 19$$

$$\Rightarrow A = 6 - (m-5)^2 \leq 6 \forall m$$

$$\text{Vậy } \max A = 6 \Leftrightarrow m = 5$$

Câu 3. (1,5 điểm)

c) Giải phương trình : $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = 5$

$$\text{Ta có } \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x - 2 + 2\sqrt{(x-1)(2x-1)} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 27 - 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 9 \\ x^2 - 150x + 725 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

d) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x+3)(2x+y) = 30 \\ x^2 + 5x + y = 13 \end{cases}$$

Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} (x^2 + 3x)(2x+y) = 30 \\ x^2 + 3x + 2x + y = 13 \end{cases}$$

Suy ra $x^2 + 3x$; $2x + y$ là hai nghiệm của phương trình $t^2 - 13t + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = 3 \end{cases}$

Vậy

$$\begin{cases} x^2 + 3x = 10 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = -1 \\ x = -5; y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x = 3 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}; y = 13 - \sqrt{21} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}; y = 13 + \sqrt{21} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $\left(\frac{-3 + \sqrt{21}}{2}; 13 - \sqrt{21}\right); \left(\frac{-3 - \sqrt{21}}{2}; 13 + \sqrt{21}\right); (2; -1); (-5; 13)$

Câu 4. (1,5 điểm)

c) Cho $A = 2(1^{2023} + 2^{2023} + \dots + 2022^{2023})$. **Chứng minh rằng** $A : 2022$

Với hai số nguyên dương a, b bất kỳ, ta có $a^{2023} + b^{2023} : (a+b)$. Ta có

$$2[1^{2023} + 2021^{2023}] : 2022$$

$$2[2^{2023} + 2020^{2023}] : 2022$$

.....

$$2[1010^{2023} + 1012^{2023}] : 2022$$

$$\text{Và } 2.1011^{2023} : 2022; 2022^{2023} : 2022$$

$$\Rightarrow A = 2(1^{2023} + 2^{2023} + \dots + 2022^{2023}) : 2022$$

d) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $2x^2 + 5y^2 + 4x = 21(1)$

$$2x^2 + 5y^2 + 4x = 21 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 5(4-y^2)$$

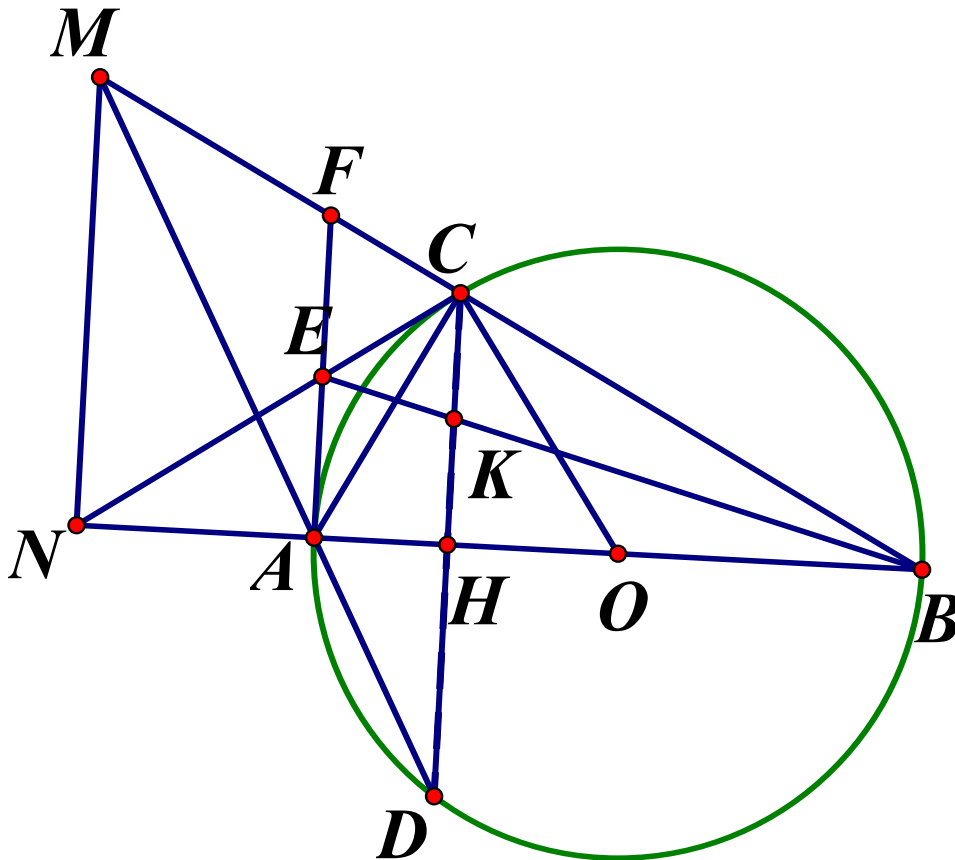
$$\text{Mà } 2(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow 5(4-y^2) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 4 \Leftrightarrow y^2 \in \{1; 4\}$$

$$y^2 = 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$y^2 = 4 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình là $(2;1);(2;-1);(-4;1);(-4;-1)$

Câu 5. (2,0 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB . Gọi H là điểm thuộc đoạn thẳng AO ($H \neq A; H \neq O$). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với AB , đường thẳng này cắt đường tròn (O) tại C và D . Hai đường thẳng BC và AD cắt nhau tại M . Gọi N là hình chiếu của M lên đường thẳng AB



d) Chứng minh $\angle ACN = \angle AMN$

Tứ giác $MNAC$ có $\angle MNA + \angle MCA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Nên tứ giác $MNAC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle ACN = \angle AMN$

e) Chứng minh $CH^2 = NH.OH$

Ta có : $\angle ACN = \angle AMN$

$\angle AMN = \angle ADC$ (do $MN \parallel DC$ vì cùng vuông góc với AB)

$AB \perp CD \Rightarrow H$ là trung điểm của CD

Tam giác ACD là tam giác cân do AH vừa là đường cao, vừa là trung tuyến

Suy ra $\angle ADC = \angle ACD$. Từ đó ta có $\angle ACN = \angle ACD$. Ta có :

$$\angle NCO = \angle ACN + \angle ACO = \angle ACD + \angle OAC = 90^\circ \Rightarrow CN \perp CO$$

$\Rightarrow \triangle NCO$ vuông tại C suy ra $CH^2 = NH.OH$

f) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt NC tại E . Chứng minh đường thẳng EB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH

$$\angle ACE = \angle EAC \left(= \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{AC} \right) \Rightarrow \triangle AEC \text{ cân tại } E \text{ nên } E \text{ thuộc trung trực } AC$$

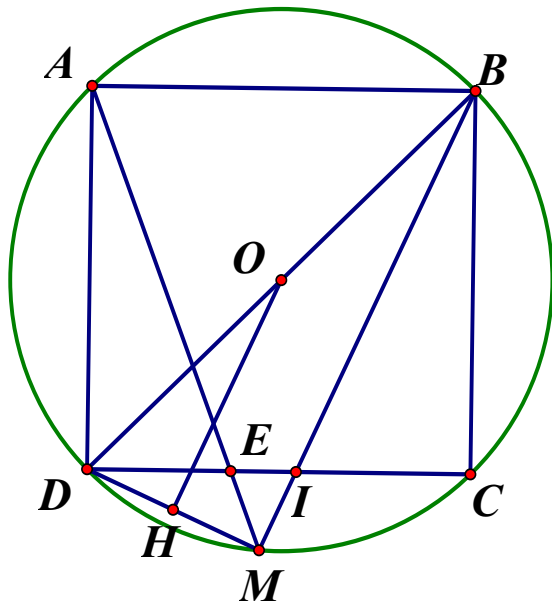
Gọi F là giao điểm của AE và BM

Ta có C thuộc đường tròn đường kính FA . Nên đường trung trực của AC phải cắt đường kính FA tại tâm của đường tròn này. Suy ra E là trung điểm của FA

Gọi K là giao điểm của CH và BE . Ta có $CH \parallel FA$ nên $\frac{CK}{FE} = \frac{KH}{EA} \left(= \frac{BK}{BE} \right)$

Mà $FE = EA$ nên $CK = KH$. Vậy BE đi qua trung điểm của CH

Câu 6. (1,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$, trên dây cung DC lấy điểm E sao cho $DC = 3DE$, đường thẳng AE cắt cung nhỏ DC tại M . Gọi I là giao điểm của BM và DC , vẽ OH vuông góc với DM tại H . Tính độ dài các đoạn thẳng AE và DI theo R



$$\text{Ta có } AD = R\sqrt{2}; DE = \frac{R\sqrt{2}}{3}; AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{2R^2 + \frac{2R^2}{9}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}R$$

$$\text{Ta có } \angle DOH = \frac{1}{2} \angle DOM = \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{DM} = \angle DAM$$

$$\Rightarrow \Delta OHD \sim \Delta ADE \Leftrightarrow \frac{DH}{OD} = \frac{DE}{AE} \Rightarrow DH = \frac{R\sqrt{10}}{10} \Rightarrow DM = \frac{R\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{Ta có } \Delta DEM \sim \Delta AEC(g.g) \Rightarrow \frac{ME}{CE} = \frac{DE}{AE} = \frac{MD}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{ME}{AE} \cdot \frac{DE}{CE} = \frac{MD^2}{AC^2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{ME}{AM} = \frac{1}{6}$$

$$EI // AB \Rightarrow \frac{EI}{AB} = \frac{ME}{AM} = \frac{1}{6} \Rightarrow EI = \frac{1}{6} AB = \frac{R\sqrt{2}}{6}$$

$$\Rightarrow DI = DE + EI = \frac{R\sqrt{2}}{3} + \frac{R\sqrt{2}}{6} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Câu 7. (1,0 điểm) Cho hai số thực không âm a, b

c) Chứng minh $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

$$\text{Ta có : } 2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a+b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

d) Biết $a^2 + b^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2ab}{a+b+2}$

$$P = \frac{2ab}{a+b+2} = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{a+b+2} = \frac{(a+b)^2 - 4 - 2}{a+b+2} = a+b-2 - \frac{2}{a+b+2}$$

$$a+b \leq 2\sqrt{3} \Rightarrow a+b+2 \leq 2+2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2}{a+b+2} \geq \frac{1}{1+\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy } P \leq 2\sqrt{3} - 2 - \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{-3+3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} a^2 + b^2 = 6 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow a = b = \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } \text{Max } P = \frac{-3+3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{3}$$