

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Bài 1. (2,5 điểm)

Cho $A = (4 + x + 2\sqrt{3+x})^2 - 10(1 + \sqrt{3+x})^2$

- a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 2\sqrt{2}$
- b) Tìm x biết $A = -9$

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho Parabol $(P): y = -2x^2$ và hai điểm $A(-1;0), B(1;-2)$

- a) Vẽ đồ thị (P) và hai điểm A, B trên cùng hệ trục tọa độ
- b) Viết phương trình đường thẳng (d) song song với AB và tiếp xúc với (P)

Bài 3. (2,0 điểm)

Cho phương trình bậc hai ẩn x, n là tham số: $nx^2 - 2(n+1)x + n = 0$

- a) Tìm n để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$
- b) Chứng minh rằng $|x_1 - x_2| \leq 2\sqrt{3}$ với mọi số n nguyên dương

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại C ($AC > BC$), $BC = 2$. Biết rằng đường tròn (O) qua ba điểm A, B, M (M là trung điểm của BC) cắt AC tại L với BL là tia phân giác của góc ABC

- a) Chứng minh $CA.CL = 2$
- b) Chứng minh $AB.LC = BC.LM$
- c) Tính độ dài cạnh AB

Bài 5. (1,0 điểm)

Một nông dân thu hoạch 100 trái dưa lưới có khối lượng trung bình là $1,5kg$. Trong 100 trái này có các trái dưa lưới nặng hơn $1,5kg$ có khối lượng trung bình là $1,73kg$, các trái dưa lưới nhẹ hơn $1,5kg$ có khối lượng trung bình là $1,33kg$ và các trái dưa lưới nặng đúng $1,5kg$

- a) Tìm biểu thức liên hệ giữa số trái dưa lưới theo khối lượng của chúng
- b) Có ít nhất bao nhiêu trái dưa lưới nặng đúng $1,5kg$?

ĐÁP ÁN

Bài 1. (2,5 điểm)

Cho $A = (4 + x + 2\sqrt{3+x})^2 - 10(1 + \sqrt{3+x})^2$

c) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 2\sqrt{2}$

Với điều kiện $3 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

$$A = \left[(1 + \sqrt{3+x})^2 \right]^2 - 10(1 + \sqrt{3+x})^2 = (1 + \sqrt{3+x})^4 - 10(1 + \sqrt{3+x})^2$$

Với $x = 2\sqrt{2}$ thì $3 + x = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3+x} = 1 + \sqrt{2}$

Suy ra $A = (2 + \sqrt{2})^4 - 10(2 + \sqrt{2})^2 = (2 + \sqrt{2})^2 \left[(2 + \sqrt{2})^2 - 10 \right]$

Do $(2 + \sqrt{2})^2 = 6 + 4\sqrt{2} \Rightarrow A = (6 + 4\sqrt{2})(-4 + 4\sqrt{2}) = 8 + 8\sqrt{2}$

d) Tìm x biết $A = -9$

Đặt $t = 1 + \sqrt{3+x}$ ($t \geq 1$). Biểu thức A trở thành $A = t^4 - 10t^2$

$$A = -9 \Leftrightarrow t^4 - 10t^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm 1 \\ t = \pm 3 \end{cases}$$

Do $t \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow 1 + \sqrt{3+x} = 1 \Leftrightarrow x = -3(tm) \\ t = 3 \Rightarrow 1 + \sqrt{3+x} = 3 \Leftrightarrow x = 1(tm) \end{cases}$

Vậy để $A = -9$ thì $x \in \{-3; 1\}$

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho Parabol (P): $y = -2x^2$ và hai điểm $A(-1; 0), B(1; -2)$

c) Vẽ đồ thị (P) và hai điểm A, B trên cùng hệ trục tọa độ

Học sinh tự vẽ đồ thị (P)

d) Viết phương trình đường thẳng (d) song song với AB và tiếp xúc với (P)

Gọi (d') : $y = ax + b$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1; 0), B(1; -2)$

Khi đó $\begin{cases} 0 = -a + b \\ -2 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow (d'): y = -x - 1$

Phương trình đường thẳng $(d) // (d')$ có dạng $y = -x + c$ (c là hằng số)

Phương trình hoành độ giao điểm $(P), (d)$: $-2x^2 = -x + c$ (*)

$(P), (d)$ tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4(-2)(-c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{8}$$

Vậy (d) : $y = -x + \frac{1}{8}$ là phương trình đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 3. (2,0 điểm)

Cho phương trình bậc hai ẩn x, n là tham số: $nx^2 - 2(n+1)x + n = 0$

c) Tìm n để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

Phương trình $nx^2 - 2(n+1)x + n = 0$ (1) là phương trình bậc hai ẩn x nên $n \neq 0$

Biệt thức $\Delta' = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2n+1 > 0 \Leftrightarrow n > -\frac{1}{2}$$

Vậy với $n > -\frac{1}{2}$ và $n \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

d) Chứng minh rằng $|x_1 - x_2| \leq 2\sqrt{3}$ với mọi số n nguyên dương

Do n nguyên dương $\Rightarrow n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq 1$

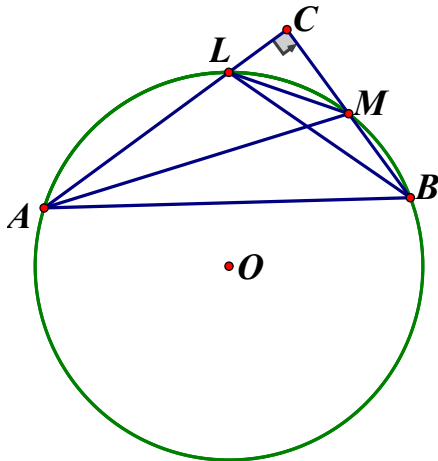
Theo hệ thức Vi-et :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 + \frac{2}{n} \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{\frac{4}{n^2} + \frac{8}{n}} \leq \sqrt{4+8} = 2\sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $n = 1$

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại C ($AC > BC$), $BC = 2$. Biết rằng đường tròn (O) qua ba điểm A, B, M (M là trung điểm của BC) cắt AC tại L với BL là tia phân giác của góc ABC



Xét $\triangle CML$ và $\triangle CAB$ có : $\angle CLM = \angle CBA$ (tứ giác $BMLA$ nội tiếp)

$$\angle MCL = \angle ACB \text{ (góc chung)} \Rightarrow \triangle CML \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{ML}{AB} = \frac{CL}{CB} \quad (1)$$

a) Chứng minh $CA.CL = 2$

$$M \text{ là trung điểm } BC \Rightarrow CM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow CM.CB = \frac{1}{2}BC^2 = 2$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow CL.CA = CM.CB = 2$$

b) Chứng minh $AB.LC = BC.LM$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow AB.LC = BC.LM$$

c) Tính độ dài cạnh AB

BL là tia phân giác $\angle ABC \Rightarrow \angle MBL = \angle ABL$

Mà B, M, L, A cùng thuộc một đường tròn nên $LM = LA$

$$\text{Từ câu a} \Rightarrow LM = LA = AC - CL = AC - \frac{2}{AC}$$

$$\text{Từ câu b} \Rightarrow AB = \frac{BC.LM}{LC} = \frac{2 \cdot \left(AC - \frac{2}{AC}\right)}{\frac{2}{AC}} = \frac{\frac{2}{AC} \cdot (AC^2 - 2)}{\frac{2}{AC}} = AC^2 - 2$$

$$\triangle ABC \text{ vuông tại } C \text{ nên } AB^2 = AC^2 + BC^2 = AC^2 + 4 = (AC^2 - 2) + 6 = AB + 6 \quad (2)$$

$$\text{Từ (2)} \Leftrightarrow (AB - 3)(AB + 2) = 0 \Leftrightarrow AB = 3 \text{ (do } AB > 0)$$

Bài 5. (1,0 điểm)

Một nông dân thu hoạch 100 trái dưa lưới có khối lượng trung bình là 1,5kg. Trong 100 trái này có các trái dưa lưới nặng hơn 1,5kg có khối lượng trung bình là 1,73kg, các trái dưa lưới nhẹ hơn 1,5kg có khối lượng trung bình là 1,33kg và các trái dưa lưới nặng đúng 1,5kg

c) Tìm biểu thức liên hệ giữa số trái dưa lưới theo khối lượng của chúng

Gọi x, y, z lần lượt là số quả dưa nặng hơn 1,5kg; bằng 1,5kg; nhẹ hơn 1,5kg

(trong đó $x, y, z \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Khi đó ta có } 1,73x + 1,5y + 1,33z = 1,5 \cdot 100 = 150 \quad (1)$$

d) Có ít nhất bao nhiêu trái dưa lưới nặng đúng 1,5kg ?

$$\text{Theo cách gọi ở câu a, ta có : } x + y + z = 100 \Rightarrow 1,5x + 1,5y + 1,5z = 150 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 0,23x - 0,17z = 0 \Leftrightarrow x = \frac{17}{23}z$$

$$\text{Vì } (17, 23) = 1 \text{ nên đặt } z = 23k \text{ (} k \in \mathbb{N}^* \text{)} \Rightarrow x = 17k \Rightarrow y = 100 - x - z = 100 - 40k$$

$$y \geq 0 \Rightarrow 100 - 40k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq 2,5 \Rightarrow k = 1; 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 60 \\ y = 20 \end{cases}$$

Vậy có ít nhất 20 trái dưa lưới nặng đúng 1,5kg