

ĐỀ CHÍNH THỨC

Số báo danh

.....

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: 27/9/2023

(Đề thi có 4 bài, gồm 01 trang)

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{2}$ và $x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

- Chứng minh dãy số (x_n) bị chặn.
- Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Bài 2 (5,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(y) + x^2 + 1) + 2x = y + (f(x+1))^2, \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (K) tiếp xúc với các cạnh CA, AB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại S . Các đường thẳng SE, SF lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm M, N khác S . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM và đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN cắt nhau tại P khác A .

- Chứng minh rằng đường thẳng AN song song với đường thẳng PM .
- Các đường thẳng EN, FM lần lượt cắt (K) tại G, H khác E, F . Đường thẳng GH và đường thẳng MN cắt nhau tại T . Chứng minh đường thẳng AS vuông góc với đường thẳng OT .

Bài 4 (5,0 điểm).

a) Tại ô vuông nằm ở vị trí trung tâm của một bảng ô vuông kích thước 11×11 (bảng gồm 121 ô vuông có cạnh là 1) có một quân cờ. Mỗi bước đi, quân cờ di chuyển đến ô vuông có chung cạnh. Có bao nhiêu cách đi để sau 10 bước đi thì quân cờ trở về vị trí ban đầu? Biết rằng trong quá trình di chuyển quân cờ có thể đi qua ô vuông nằm ở vị trí trung tâm.

b) Chọn ra một số tập con gồm 4 phần tử từ một tập hợp A có 36 phần tử sao cho bất cứ hai tập 4 phần tử nào trong các tập con đã chọn cũng có nhiều nhất là hai phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại một tập con của A gồm ít nhất 6 phần tử của A sao cho tập này không chứa bất cứ tập con 4 phần tử nào đã chọn.

----- HẾT -----

(Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay khi làm bài)