

ĐỀ THI TUYỂN SINH 10 CHUYÊN TP HÀ NỘI 2024-2025
MÔN : TOÁN CHUYÊN (TIN)

Bài 1:

1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 - 3x - 2$
2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{x-2y}{z} = \frac{y-2z}{x} = \frac{z-2x}{y}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(2 + \frac{x}{y}\right)\left(2 + \frac{y}{z}\right)\left(2 + \frac{z}{x}\right)$

Bài 2:

1. Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $2x^2 + 2xy + 3y = 4y^2 + 3$
2. Cho các số nguyên dương x, y và số nguyên tố p thỏa mãn $\frac{p}{(2x+y)^2} = \frac{x-y}{p}$. Chứng minh $p = 3y + 2$.

Bài 3:

1. Cho a, b và c là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{a-b^2}{b} = a(a-c^2)$.

Chứng minh $b = c$.

2. Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a \leq 1, b \leq 1, c \leq 1; a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{a^4}{bc+2} + \frac{b^4}{ca+2} + \frac{c^4}{ab+2}$$

Bài 4:

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng đi qua A và song song với BC cắt (O) tại giao điểm thứ hai là D . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng DM cắt (O) tại giao điểm thứ hai là S

1. Chứng minh rằng tam giác ACS đồng dạng với tam giác BMS
2. Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng AS . Đường thẳng BJ cắt (O) tại giao điểm thứ hai là T . Chứng minh rằng đường thẳng CT song song với đường thẳng AS .
3. Các đường cao DE, BF, CK của tam giác BDC đồng quy tại H . Gọi L là chân đường vuông góc kẻ từ H đến KF . Chứng minh rằng các đường thẳng AE và DL cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .

Bài 5:

Cho bảng ô vuông kích thước $n \times n$ và hai loại miếng ghép hình “dấu cộng”, “dấu trừ” như hình dưới. Ta cần phủ kín bảng ô vuông đã cho bằng cách sử dụng cả hai loại miếng ghép không được chồng lên nhau. Biết rằng mỗi ô vuông nhỏ của các miếng ghép chồng khít với một ô vuông nhỏ trong bảng và miếng ghép “dấu trừ” có thể xoay 90° .

1. Chỉ ra một cách phủ kín thỏa mãn yêu cầu trên với $n = 6$.
2. Tìm tất cả giá trị của n để bảng ô vuông kích thước $n \times n$ có thể được phủ kín bằng cách sử dụng cả hai loại miếng ghép trên.

ĐÁP ÁN

Bài 1:

1. Điều kiện: $x^2 - 3x \geq 0$

Đặt $\sqrt{x^2 - 3x} = t \geq 0$

Phương trình đã cho trở thành

$$t = t^2 - 2 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (do } t \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} (tm)$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1, x = 4$

2. Ta có ngay $x + y + z > 0$ và $x - 2y; y - 2z; z - 2x \neq 0$

Vì thế áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có

$$\frac{x-2y}{z} = \frac{y-2z}{x} = \frac{z-2x}{y} = \frac{x-2y+y-2z+z-2x}{x+y+z} = \frac{-x-y-z}{x+y+z} = -1$$

Vậy $x - 2y = -z \Rightarrow x + z = 2y$

Tương tự cũng có được $y + z = 2x, x + y = 2z$

Từ đó $x + y + z = 3x = 3y = 3z \Rightarrow x = y = z$

Vì vậy giá trị của biểu thức $P = (2+1)(2+1)(2+1) = 27$

Bài 2:

1. Ta có: $4x^2 + 8xy + y^2 = 9y^2 - 6y + 1$

$$\Rightarrow (2x + y)^2 = (3y - 1)^2 + 5$$

$$\Leftrightarrow (2x - 2y + 1)(2x + 4y - 1) = 5$$

Do x, y nguyên nên ta có các trường hợp sau

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2x - 2y + 1 = 1 \\ 2x + 4y - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Tương tự với các trường hợp $(5, 1); (-1; -5); (-5; -1)$ ta được các nghiệm (x, y) thỏa mãn là $(-2; 1)$

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm (x, y) thỏa mãn là $(-2; 1)$ và $(1; 1)$

2. Rõ ràng $x \neq y \Rightarrow p^2 = (x - y)(2x + y)^2$

Từ đó p^2 chia hết cho $(2x + y)^2$ nên p chia hết cho $2x + y$

Vì x, y nguyên dương nên $2x + y \geq 3 \Rightarrow 2x + y = p$

Thay vào $p^2 = (x - y)(2x + y)^2 \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1$

Vì vậy $p = 2x + y = 2(y + 1) + y = 3y + 2$ và ta có điều phải chứng minh.

Bài 3:

1. Ta có: $c^2 = \frac{a^2b + b^2 - a}{ab} \Rightarrow a^2b + b^2 - a : ab \Rightarrow b^2 - a : ab \Rightarrow a : b$

Vì vậy tồn tại số nguyên dương k sao cho $a = bk$.

Lúc này ta có được $b^3k + b^2 - bk : b^2k \Rightarrow b^2k + b - k : bk$

$$\text{Do đó } b-k:bk \Rightarrow \begin{cases} b:k \\ k:b \end{cases} \Rightarrow k=b$$

$$\text{Vì vậy } a=b^2 \Rightarrow a-c^2=0 \Rightarrow a=c^2 \Rightarrow b=c$$

2. Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$T \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca+6} = \frac{4}{ab+bc+ca+6}$$

$$\text{Lại có } a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

Theo bất đẳng thức Cauchy nên $ab+bc+ca \leq 2$

$$\text{Vì vậy } T \geq \frac{4}{2+6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Lại có } (b-1)(c-1) \geq 0 \Rightarrow bc+2 \geq b+c+1 \geq b+c+a$$

$$\text{Cũng có } a(1-a^3) \geq 0 \Rightarrow a^4 \leq a$$

$$\Rightarrow \frac{a^4}{bc+2} \leq \frac{a}{a+b+c}$$

Tương tự và cộng theo từng vế ta có ngay

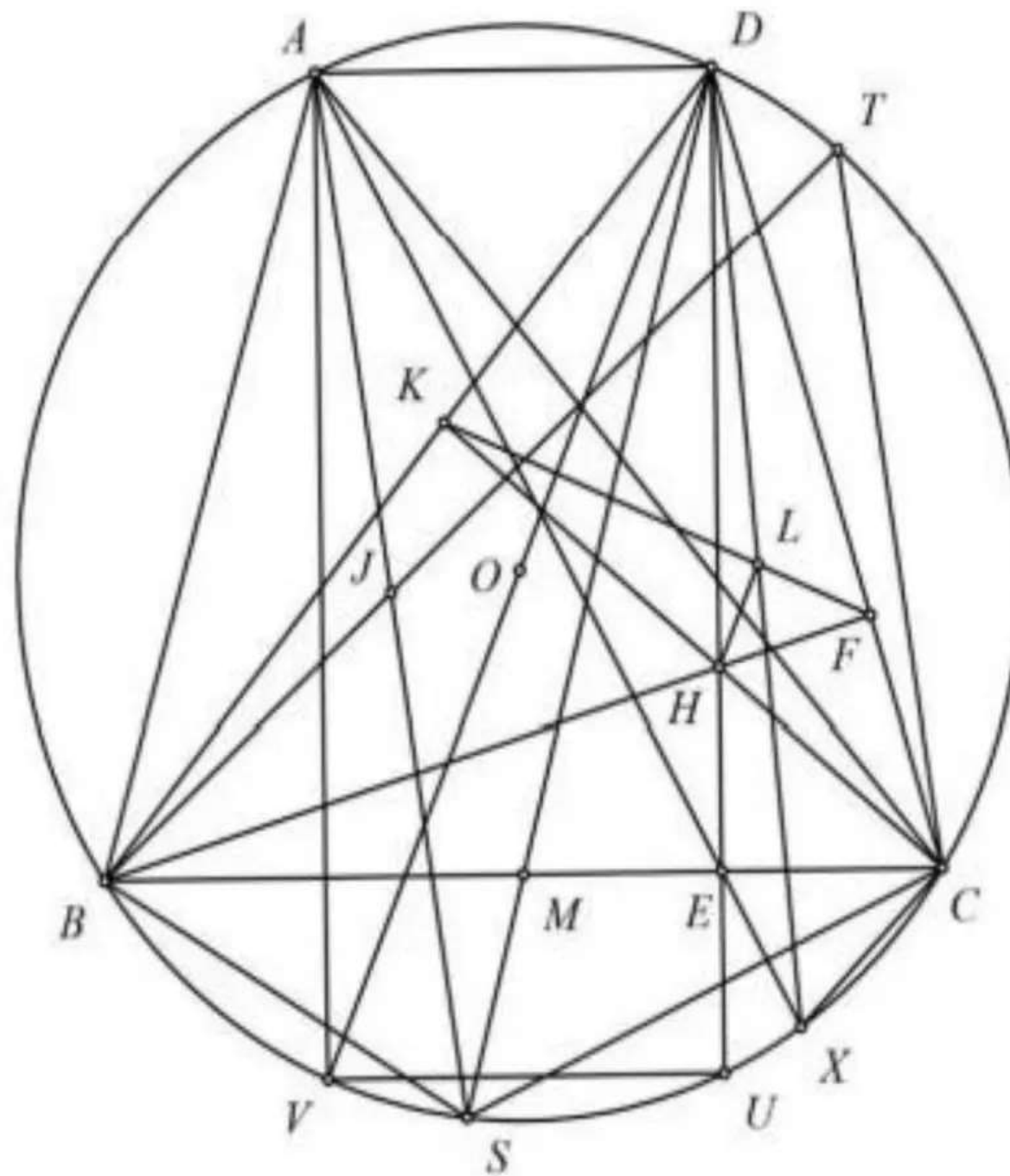
$$T \leq \frac{a}{b+c+a} + \frac{b}{c+a+b} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{2} \leq T \leq 1$$

Tóm lại giá trị nhỏ nhất của T bằng $\frac{1}{2}$, chẳng hạn khi $a=b=c=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Còn giá trị lớn nhất của T bằng 1, chẳng hạn khi $a=b=1$, còn $c=0$

Bài 4:



a) Ta có: $ASC = BSM$ (do $AC = BD$)

Mà $SBM = SAC \Rightarrow \Delta SBM \sim \Delta SAC$

b) Từ câu a ta có $BS.AC = AS.BM = \frac{1}{2}.AS.BC = SJ.BC$

$$\Rightarrow \frac{BS}{SJ} = \frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow \Delta JBS \sim \Delta ABC (c - g - c)$$

Từ đó $JBA = SBC \Rightarrow TC \parallel AS$

c) DL cắt (O) tại X khác D

Ta có: $DXC = DBC = DFK \Rightarrow$ Tứ giác LXCF nội tiếp

Suy ra $DL.DX = DF.DC = DH.DE$

$\Rightarrow$ HEXL nội tiếp

Kẻ đường kính DV của (O)

DE cắt (O) tại U

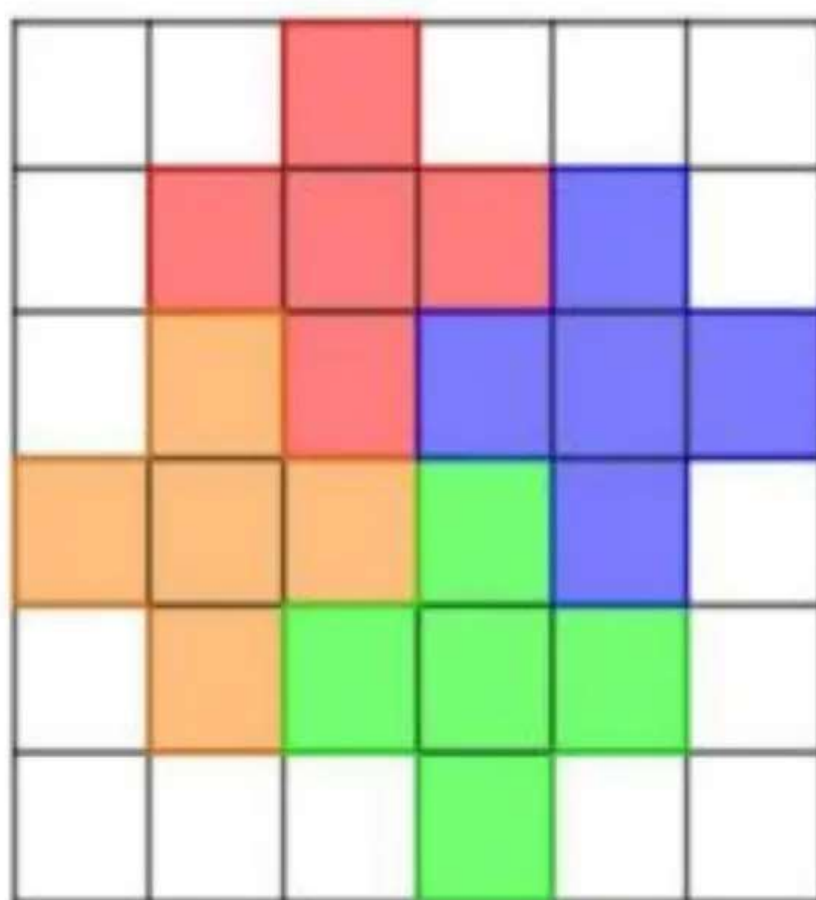
Ta có: $EXL = DHL = ODH$ (do $OD \perp FK$)

$$= \frac{1}{2}sdUV = \frac{1}{2}sdAD = AXD$$

Vậy A, E, X thẳng hàng. Ta có đpcm

Bài 5:

1. Ta có cách phủ kín bảng trông TH $n = 6$ như sau: (phần màu trắng được ghép bởi các “dấu trừ”)



2. Tô màu bảng $n \times n$ như hình bàn cờ thì một “dấu trừ” sẽ luôn phủ 1 ô trắng, 1 ô đen, một “dấu cộng” luôn phủ 4 trắng, 1 đen hoặc 4 đen, 1 trắng

Gọi số “dấu trừ” được sử dụng là a, số “dấu cộng” 4 trắng – 1 đen và 4 đen – 1 trắng lần lượt được sử dụng là b, c.

Khi đó:

+ Số ô trắng được phủ là: $a + 4b + c$

+ Số ô đen được phủ là: $a + b + 4c$

Mà bảng tô theo hình bàn cờ, nên hiệu số ô trắng trừ số ô đen trong bảng luôn thuộc $\{-1, 0, 1\}$ nên $3(b - c) \in \{-1, 0, 1\}$

Do đó $b = c$

Dẫn đến tổng số ô trong bảng là $2a + 10b$, là một số chẵn, hay n phải chẵn.

Với $n = 2$, $n = 4$ dễ thấy không thể phủ được.

Vì $n = 6$ phủ được nên với n chẵn, $n \geq 8$ bất kì, ta chỉ cần phủ bảng con 6×6 ở một góc như ý 1), phần còn lại phủ bởi các “dấu trừ” là xong

Vậy để bảng có thể phủ được thì n chẵn và $n \geq 6$.