

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
GIA LAI**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2021 - 2022**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: Toán

Thời gian: 150 phút(không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 17/04/2022

(Đề thi có 06 câu, gồm 01 trang)

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\sqrt{(x+1)^2 + x^2} - \sqrt{(x-1)^2 + x^2} \right) \sqrt{4x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4 + 1}}$.

b) Cho số $p = n^4 - 11n^2 + 49$ với $n \in \mathbb{N}$. Hãy tìm các giá trị của n để p là số nguyên tố.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình sau $x^2 + 5 = \frac{27x^3 + 3x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

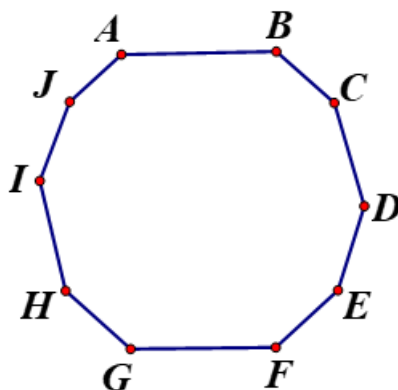
b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau $(2x + 5y + 1)(2^{|x|} + x^2 + x + y) = 105$.

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho một đa giác có 10 đỉnh như hình vẽ ở bên (bốn đỉnh: A, B, C, D hoặc B, C, D, E hoặc C, D, E, F hoặc ... hoặc J, A, B, C được gọi là bốn đỉnh liên tiếp của đa giác). Các đỉnh của đa giác được đánh số một cách tùy ý bởi các số nguyên thuộc tập hợp

$M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ (biết mỗi đỉnh chỉ được đánh bởi một số, các số được đánh ở các

đỉnh là khác nhau). Chứng minh rằng ta luôn tìm được 4 đỉnh liên tiếp của đa giác được đánh số thuộc tập hợp M mà tổng các số đó lớn hơn 21.



Câu 4. (5,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Trên cung nhỏ AD lấy điểm E (E không trùng với A và D). Tia EB cắt các đường thẳng AD, AC lần lượt tại I và K . Tia EC cắt các đường thẳng DA, DB lần lượt tại M, N .

a) Chứng minh rằng $\widehat{IAN} = \widehat{NBI}$.

b) Khi điểm M ở vị trí trung điểm của AD . Hãy tính độ dài đoạn AE theo R .

Câu 5. (2,0 điểm)

Gọi M là điểm bất kỳ trong tam giác ABC . Qua M kẻ các đường thẳng DE, GH, IK lần lượt song song với BC, CA, AB ($D, G \in AB; E, I \in CA; K, H \in BC$).

Chứng minh rằng: $S_{AGMI} + S_{BDMK} + S_{CEMH} \leq \frac{2}{3} S_{ABC}$ (S là diện tích).

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $xy + yz + zx = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức sau
$$P = \frac{3x + 3y + 2z}{\sqrt{6(x^2 + 5)} + \sqrt{6(y^2 + 5)} + \sqrt{z^2 + 5}}.$$

---Hết---

Lưu ý: - Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

- Giám thị không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\sqrt{(x+1)^2 + x^2} - \sqrt{(x-1)^2 + x^2} \right) \sqrt{4x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4 + 1}}$.

b) Cho số $p = n^4 - 11n^2 + 49$ với $n \in \mathbb{N}$. Hãy tìm các giá trị của n để p là số nguyên tố.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A_1 &= \sqrt{(x+1)^2 + x^2} - \sqrt{(x-1)^2 + x^2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \\ A_2 &= \sqrt{4x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4 + 1}} = \sqrt{4x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2}} \\ &= \sqrt{4x^2 + 2 + 2\sqrt{(2x^2 + 1)^2 - (2x)^2}} \\ &= \sqrt{2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)} + 2x^2 - 2x + 1} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \right)^2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \\ \Rightarrow A &= A_1 \cdot A_2 = \left(\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \right) \left(\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \right) \\ &= 2x^2 + 2x + 1 - 2x^2 + 2x - 1 = 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \text{Ta có: } p &= n^4 - 11n^2 + 49 = (n^4 + 14n^2 + 49) - 25n^2 = (n^2 + 7)^2 - (5n)^2 \\ &= (n^2 - 5n + 7)(n^2 + 5n + 7) \end{aligned}$$

Với $n = 0$ thì $p = 7^2$ không phải là số nguyên tố. Do đó $n = 0$ (loại).

Với $n > 0$; $n \in \mathbb{N}$ thì $n^2 - 5n + 7 < n^2 + 5n + 7$ và $n^2 + 5n + 7 > 1$

Để p là số nguyên tố thì

$$n^2 - 5n + 7 = 1 \Leftrightarrow n^2 - 5n + 6 = 0 \Leftrightarrow (n-2)(n-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 3 \end{cases}$$

Với $n = 2 \Rightarrow p = 21$ không phải là số nguyên tố. Do đó $n = 2$ (loại).

Với $n = 3 \Rightarrow p = 31$ là số nguyên tố.

Vậy $n = 3$ thì p là số nguyên tố.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình sau $x^2 + 5 = \frac{27x^3 + 3x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau $(2x + 5y + 1)(2^{|x|} + x^2 + x + y) = 105$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x^2 + 5 &= \frac{27x^3 + 3x}{\sqrt{x^2 + 4}} \Leftrightarrow (x^2 + 4 + 1)\sqrt{x^2 + 4} = 27x^3 + 3x \\ \Leftrightarrow (x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 4} &= 27x^3 + 3x \quad (*) \end{aligned}$$

Đặt $a = \sqrt{x^2 + 4}$; $b = 3x$ thì phương trình (*) trở thành:

$$a^3 + a = b^3 + b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\text{Vì } a^2 + ab + b^2 + 1 = \left(a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2\right) + \frac{3}{4}b^2 + 1 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 + 1 > 0$$

$$a = b \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 4 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 8x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $(2x + 5y + 1)(2^{|x|} + x^2 + x + y) = 105.$

Vì 105 là số lẻ nên $2x + 5y + 1$ và $2^{|x|} + x^2 + x + y$ phải là các số lẻ

Từ $2x + 5y + 1$ là số lẻ mà $2x + 1$ là số lẻ nên $5y$ là số chẵn suy ra y chẵn

$2^{|x|} + x^2 + x + y$ là số lẻ mà $x^2 + x = x(x + 1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên là số chẵn, y cũng chẵn nên $2^{|x|}$ là số lẻ. Điều này xảy ra khi $x = 0$

Thay $x = 0$ vào phương trình đã cho ta được:

$$(5y + 1)(y + 1) = 105 \Leftrightarrow 5y^2 + 6y - 104 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 - 20y + 26y - 104 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5y(y - 4) + 26(y - 4) = 0 \Leftrightarrow (5y + 26)(y - 4) = 0$$

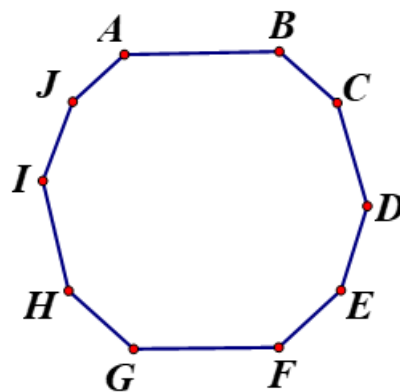
$$\Leftrightarrow y = \frac{-26}{5} \text{ (loại) hoặc } y = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x; y) = (0; 4).$

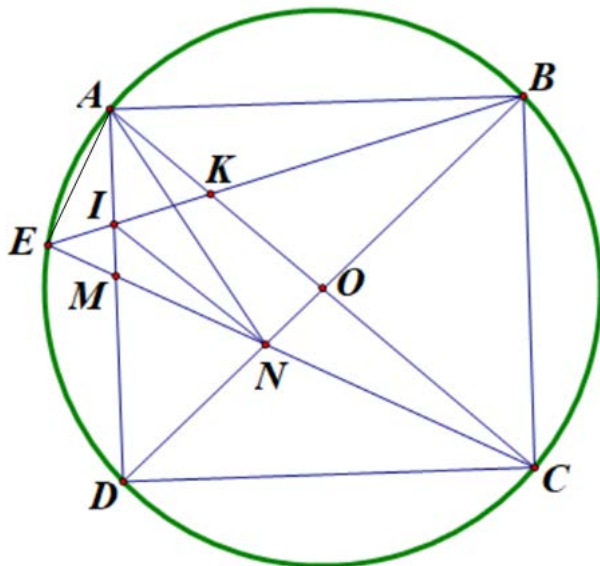
Câu 3. (2,0 điểm)

Cho một đa giác có 10 đỉnh như hình vẽ ở bên (bốn đỉnh: A, B, C, D hoặc B, C, D, E hoặc C, D, E, F hoặc ... hoặc J, A, B, C được gọi là bốn đỉnh liên tiếp của đa giác). Các đỉnh của đa giác được đánh số một cách tùy ý bởi các số nguyên thuộc tập hợp

$M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ (biết mỗi đỉnh chỉ được đánh bởi một số, các số được đánh ở các đỉnh là khác nhau). Chứng minh rằng ta luôn tìm được 4 đỉnh liên tiếp của đa giác được đánh số thuộc tập hợp M mà tổng các số đó lớn hơn 21.



Lời giải



a) Ta có $\widehat{NAC} = \widehat{NCA}$ (BD là đường trung trực của AC)
 $\widehat{DAC} = \widehat{DCA}$ (tính chất đường chéo hình vuông)
 Suy ra $\widehat{IAN} = \widehat{DAC} - \widehat{NAC} = \widehat{DCA} - \widehat{NCA} = \widehat{DCN}$
 mà $\widehat{DCN} = \widehat{NBI}$ (cùng chắn cung DE) suy ra $\widehat{IAN} = \widehat{NBI}$.

b) + $\triangle MDC$ vuông tại D nên

$$MC^2 = CD^2 + MD^2 = CD^2 + \frac{CD^2}{4} = \frac{5CD^2}{4} \Rightarrow MC = \frac{\sqrt{5}}{2} CD$$

Chứng minh $\triangle MDC$ đồng dạng $\triangle MEA$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{CD}{AE} = \frac{CM}{AM} \Rightarrow AE = \frac{AM \cdot CD}{MC} = \frac{\frac{CD^2}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} CD} = \frac{\sqrt{5}}{5} CD$$

+ $\triangle OCD$ vuông cân tại O có $OC = OD = R$ ta tính được $CD = R\sqrt{2}$

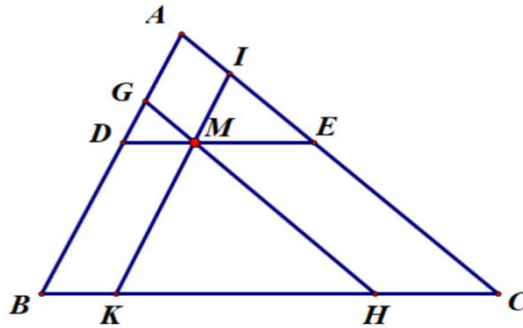
$$\text{Do đó, } AE = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot R\sqrt{2} = \frac{R\sqrt{10}}{5} \text{ (đvdd)}$$

Câu 5. (2,0 điểm)

Gọi M là điểm bất kỳ trong tam giác ABC . Qua M kẻ các đường thẳng DE, GH, IK lần lượt song song với BC, CA, AB ($D, G \in AB; E, I \in CA; K, H \in BC$).

Chứng minh rằng: $S_{AGMI} + S_{BDMK} + S_{CEMH} \leq \frac{2}{3} S_{ABC}$ (S là diện tích).

Lời giải



Ta có các tam giác ABC, GDM, MKH, IME đồng dạng. Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các tam giác ABC, GDM, MKH, IME

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} &= \sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{DM}{BC} + \frac{KH}{BC} + \frac{ME}{BC} \\ &= \frac{DM + KH + ME}{BC} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S}$$

Ta có $(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})^2 + (\sqrt{S_2} - \sqrt{S_3})^2 + (\sqrt{S_3} - \sqrt{S_1})^2 \geq 0$ khai triển ta được

$$3(S_1 + S_2 + S_3) \geq (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2 \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{1}{3} S$$

$$\text{Vậy } S_{AGMI} + S_{BDMK} + S_{CEMH} \leq \frac{2}{3} S_{ABC}$$

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $xy + yz + zx = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức sau
$$P = \frac{3x + 3y + 2z}{\sqrt{6(x^2 + 5)} + \sqrt{6(y^2 + 5)} + \sqrt{z^2 + 5}}.$$

Lời giải

Từ giả thiết $xy + yz + zx = 5$, ta có: $x^2 + 5 = x^2 + xy + yz + xz = (x + y)(z + x)$

$$y^2 + 5 = y^2 + xy + yz + xz = (x + y)(y + z)$$

$$z^2 + 5 = z^2 + xy + yz + xz = (x + z)(y + z)$$

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt{6(x^2 + 5)} = \sqrt{6(x + y)(z + x)} \leq \frac{3(x + y) + 2(z + x)}{2} = \frac{5x + 3y + 2z}{2}$$

Chứng minh tương tự, ta được: $\sqrt{6(y^2 + 5)} \leq \frac{3x + 5y + 2z}{2}; \sqrt{z^2 + 5} \leq \frac{x + y + 2z}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức, ta được:

$$\sqrt{6(x^2 + 5)} + \sqrt{6(y^2 + 5)} + \sqrt{z^2 + 5} \leq \frac{9x + 9y + 6z}{2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{3x + 3y + 2z}{\sqrt{6(x^2 + 5)} + \sqrt{6(y^2 + 5)} + \sqrt{z^2 + 5}} \geq \frac{2(3x + 3y + 2z)}{9x + 9y + 6z} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = y = 1, z = 2.$$

---Hết---

Quy định khi gõ lời giải:

1. Phông chữ: Times New Roman, cỡ chữ 12
2. Công thức gõ trên mathtype, cỡ chữ 12.
3. Hình vẽ được vẽ trên các phần mềm: geogebra; Geometer's Sketchpad