

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

(Thời gian làm bài 180 phút, không kể phát đề)

Ngày thi: 18/8/2024

Đề thi này có 01 trang

Bài 5: (6,0 điểm)

a) Với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} > \frac{3}{ab + bc + ca}.$$

b) Tìm tất cả các số thực a sao cho tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2024) = 2024$ và

$$a(f(x) - f(f(y))) \leq x - y, \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6: (7,0 điểm)

a) Có bao nhiêu cách chọn ra hai số phân biệt từ 2024 số nguyên dương đầu tiên sao cho hai số được chọn hơn kém nhau không quá 5 đơn vị?

b) Một lớp học có 45 học sinh. Các học sinh tham gia vào tổng cộng m câu lạc bộ. Chứng minh rằng nếu mỗi câu lạc bộ có đúng 5 học sinh và hai học sinh bất kỳ tham gia chung nhiều nhất một câu lạc bộ thì $m \leq 99$.

c) Với số nguyên dương n ($n \geq 2$), xét tập hợp A gồm n số nguyên dương. Ký hiệu $f(A)$ là số các giá trị phân biệt tạo thành từ việc lấy tổng hai phần tử tùy ý của A . Chứng minh rằng $f(A) \geq 2n - 3$. Tìm tất cả các tập hợp A sao cho đẳng thức xảy ra.

Bài 7: (7,0 điểm)

Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cùng bán kính R , cắt nhau tại A, B và $O_1O_2 > R$. Đường thẳng qua A , vuông góc với AB , cắt lại $(O_1), (O_2)$ theo lần lượt tại C, D . Trên nửa mặt phẳng bờ CD chứa B , xét tia Ax tạo với tia AC góc 60° và tia Ax cắt (O_2) tại E , cắt (O_1) tại F .

a) Chứng minh rằng O_1, O_2, E, F cùng thuộc một đường tròn, đồng thời DE, CF cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng qua B và vuông góc với Ax .

b) Trên nửa đường tròn đường kính CA , khác phía với O_1 , dựng T sao cho $CT = R$. Chứng minh rằng $O_1E + O_2F \geq 2TA$.

--- HẾT ---

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký của Giám thị 1: Chữ ký của Giám thị 2: