

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (4,0 điểm)

- 1.1) Cho biểu thức $A = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$. Hãy biểu diễn A dưới dạng tổng của ba căn thức bậc hai
- 1.2) Trong kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2022 – 2023, số thí sinh đăng ký dự thi vào trường THPT chuyên A nhiều gấp rưỡi số thí sinh đăng ký dự thi vào trường THPT chuyên B. Biết rằng tổng số phòng thi của cả hai trường là 50 phòng thi và mỗi phòng thi có đúng 24 thí sinh. Tính số thí sinh đăng ký dự thi vào mỗi trường

Câu 2. (4,0 điểm)

- 2.1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $2023n^3 - n$ chia hết cho 6
- 2.2. Bạn Thanh mua một số quyển vở và một số cây bút hết tất cả là 263 nghìn đồng. Biết giá mỗi quyển vở là 13 nghìn đồng, giá mỗi cây bút là 12 nghìn đồng. Hỏi bạn Thanh mua được bao nhiêu quyển vở và bao nhiêu cây bút ?

Câu 3. (5,0 điểm)

- 3.1. Cho tam giác ABC nhọn có $\angle ABC = 60^\circ$, hai đường cao là AH và CK . Tính diện tích tam giác ABC , biết diện tích tứ giác $AKHC$ bằng $30cm^2$
- 3.2 Cho phương trình : $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $2018 < x_1 < x_2 < 2023$

Câu 4. (4,0 điểm)

- 4.1 Giải phương trình $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) - 3 = 0$
- 4.2 Cho một tấm bìa hình chữ nhật có hai kích thước là $50cm, 80cm$. Một người muốn làm một chiếc hộp đựng quà bằng cách cắt bốn góc của tấm bìa bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập lại để được một chiếc hộp không nắp. Tìm độ dài x để chiếc hộp thu được có thể tích lớn nhất

Câu 5. (3,0 điểm)

- 5.1 Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c}$

- 5.2 Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O có trục tâm là H . Gọi M là điểm trên cung nhỏ BC ($M \neq B; C$). Gọi N, P theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, AC . Chứng minh rằng ba điểm N, H, P thẳng hàng

ĐÁP ÁN

Câu 1. (4,0 điểm)

1.3) Cho biểu thức $A = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$. Hãy biểu diễn A dưới dạng tổng của ba căn thức bậc hai

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}} \\ &= \sqrt{2 + 3 + 5 + 2\sqrt{2 \cdot 3} + 2\sqrt{2 \cdot 5} + 2\sqrt{3 \cdot 5}} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \end{aligned}$$

1.4) Trong kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2022 – 2023, số thí sinh đăng ký dự thi vào trường THPT chuyên A nhiều gấp rưỡi số thí sinh đăng ký dự thi vào trường THPT chuyên B. Biết rằng tổng số phòng thi của cả hai trường là 50 phòng thi và mỗi phòng thi có đúng 24 thí sinh. Tính số thí sinh đăng ký dự thi vào mỗi trường

Gọi số thí sinh đăng ký dự thi vào trường THPT chuyên B là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

Theo đề bài, số thí sinh đăng ký dự thi vào trường THPT chuyên A là $1,5x$

Tổng số thí sinh của cả hai trường : $50 \cdot 24 = 1200$. Ta có phương trình
 $x + 1,5x = 1200 \Leftrightarrow x = 480(tm)$

Vậy số thí sinh đăng ký vào trường B là 480 em, trường A là 720 em

Câu 2. (4,0 điểm)

2.1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $2023n^3 - n$ chia hết cho 6

$$2023n^3 - n = 2022n^3 + n^3 - n = 2022n^3 + (n-1)n(n+1)$$

$$*) 2022n^3 : 6$$

$$*) (n-1)n(n+1) : 6$$

$$\Rightarrow 2023n^3 - n : 6$$

2.2. Bạn Thanh mua một số quyển vở và một số cây bút hết tất cả là 263 nghìn đồng. Biết giá mỗi quyển vở là 13 nghìn đồng, giá mỗi cây bút là 12 nghìn đồng. Hỏi bạn Thanh mua được bao nhiêu quyển vở và bao nhiêu cây bút ?

Gọi số quyển vở, số cây bút bạn Thanh mua được là x và y . (Điều kiện $x, y \in \mathbb{N}^*$)

Theo giả thiết ta có $13x + 12y = 263000(1)$

$$\text{Từ (1) ta có : } y = \frac{263 - 13x}{12} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 12 \text{ và } 263 - 13x : 12(2)$$

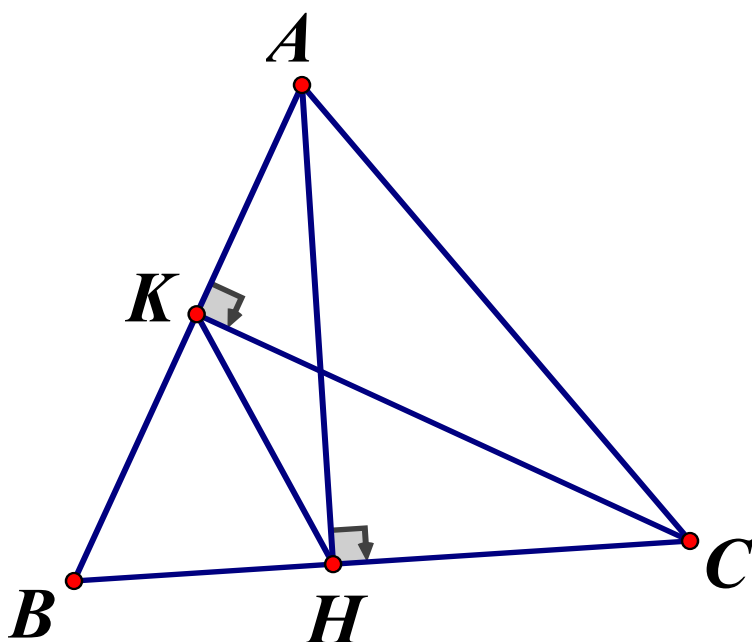
$$13x + 12y \text{ phải là số lẻ nên } 13x \text{ lẻ, do đó } x \text{ lẻ} \Leftrightarrow x = 2k + 1, k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

Thử lần lượt các giá trị ta nhận giá trị duy nhất $k = 5 \Rightarrow x = 11$ (thỏa mãn (2))

Vậy $x = 11, y = 10$, hay bạn Thanh mua được 11 quyển vở và 10 cây bút

Câu 3. (5,0 điểm)

3.1. Cho tam giác ABC nhọn có $\angle ABC = 60^\circ$, hai đường cao là AH và CK . Tính diện tích tam giác ABC , biết diện tích tứ giác $AKHC$ bằng $30cm^2$



Tứ giác $AKHC$ nội tiếp (vì có góc $\angle AKC = \angle AHC = 90^\circ$ cùng nhìn cạnh AC)

Suy ra $\angle BKH = \angle ACB$ (tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

$$\Rightarrow \Delta BKH \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{S_{BKH}}{S_{BCA}} = \left(\frac{BH}{BA} \right)^2 = (\cos \angle ABH)^2 \Leftrightarrow \frac{S_{AKH}}{S_{ACB}} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = 4S_{ABH} = 4(S_{ABC} - S_{AKHC}) \Leftrightarrow S_{ABC} = \frac{4}{3}S_{AKHC} = \frac{4}{3} \cdot 30 = 40 (cm^2)$$

Vậy diện tích tam giác ABC là $40cm^2$

3.2 Cho phương trình : $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 3m = 0$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$2018 < x_1 < x_2 < 2023$$

$$\text{Vì } \Delta = (2m-3)^2 - 4(m^2 - 3m) = 9 > 0$$

Nên phương trình : $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = m-3; x_2 = m. \text{ Theo giả thiết : } 2018 < x_1 < x_2 < 2023$$

$$\Leftrightarrow 2018 < m-3 < m < 2023 \Leftrightarrow 2021 < m < 2023 \Rightarrow m = 2022 (\text{do } m \in \mathbb{Z})$$

Vậy $m = 2022$

Câu 4. (4,0 điểm)

$$\text{4.1 Giải phương trình } (\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) - 3 = 0$$

Điều kiện $x \geq -2$. Đặt $a = \sqrt{x+5}, b = \sqrt{x+2}, (a, b \geq 0)$

$$\text{Ta có } a^2 - b^2 = 3, \sqrt{x^2 + 7x + 10} = \sqrt{(x+5)(x+2)} = ab$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } (a-b)(ab+1) = a^2 - b^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b-ab-1)=0 \Leftrightarrow (a-b)(a-1)(1-b)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5}=\sqrt{x+2} \text{ (ktm)} \\ \sqrt{x+5}=1 \Rightarrow x=-4 \text{ (ktm)} \\ \sqrt{x+2}=1 \Rightarrow x=-1 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-1$

4.2 Cho một tấm bìa hình chữ nhật có hai kích thước là $50cm, 80cm$. Một người muốn làm một chiếc hộp đựng quà bằng cách cắt bốn góc của tấm bìa bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gấp lại để được một chiếc hộp không nắp. Tìm độ dài x để chiếc hộp thu được có thể tích lớn nhất

Thể tích hình hộp là $V(x)=x(80-2x)(50-2x)(cm^3)$. Cần tìm x sao cho V lớn nhất

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy* cho 3 số thực dương ta có :

$$V(x)=x(80-2x)(50-2x)=\frac{2}{3}.3x(50-2x)(40-x)$$

$$\leq \frac{2}{3} \left[\frac{3x+(50-2x)+(40-x)}{3} \right]^3 = \frac{2}{3}.30^3 = 18000$$

Dấu bằng xảy ra khi $3x=50-2x \Leftrightarrow x=10(tm)$

Vậy để gấp được chiếc hộp có thể tích lớn nhất thì cần cắt 4 góc tấm bìa lúc đầu 1 hình vuông có cạnh là $10cm$

Câu 5. (3,0 điểm)

5.1 Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c}$

Ta có : $a+b+c=3$

$$P = \frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \Rightarrow P = \frac{a}{a+3} + \frac{b}{b+3} + \frac{c}{c+3}$$

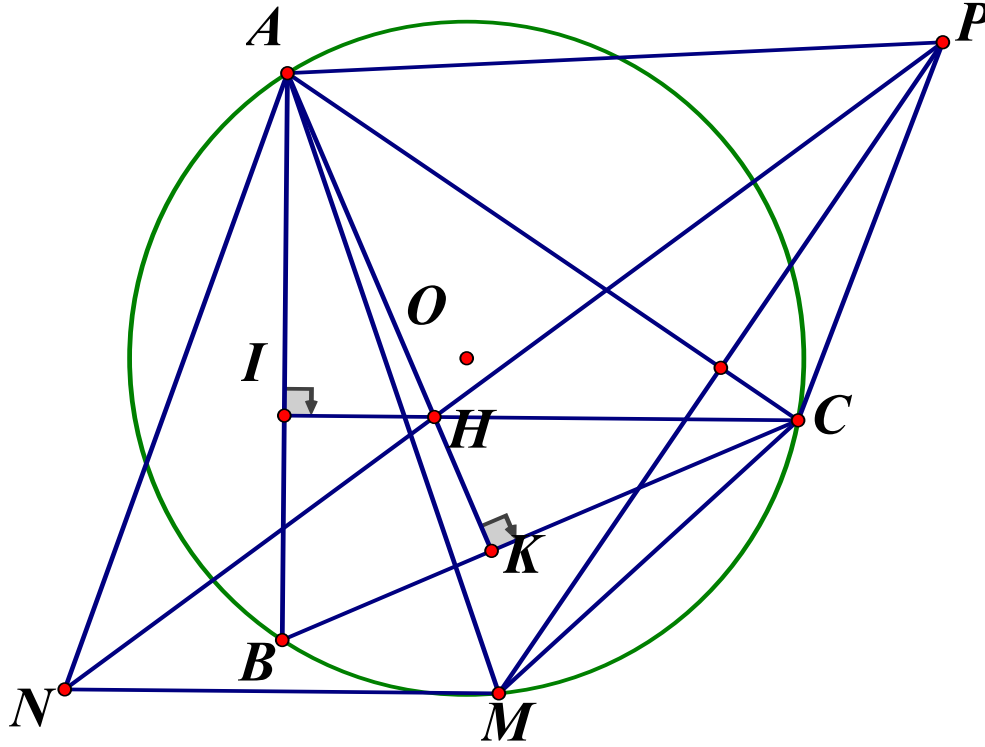
$$\Rightarrow 3-P = 1 - \frac{a}{a+3} + 1 - \frac{b}{b+3} + 1 - \frac{c}{c+3} = \frac{3}{a+3} + \frac{3}{b+3} + \frac{3}{c+3} = 3 \left(\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} \right)$$

$$Do \left(\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} \right) (a+3+b+3+c+3) \Leftrightarrow 3 \left(\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} \right) \geq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3-P \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow P \leq \frac{3}{4}$$

$$Vậy \text{ Max } P = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a=b=c=1$$

5.2 Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O có trực tâm là H . Gọi M là điểm trên cung nhỏ BC ($M \neq B; C$). Gọi N, P theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, AC . Chứng minh rằng ba điểm N, H, P thẳng hàng



Nhận xét tứ giác $BIHK$ nội tiếp nên $\angle IBK + \angle IHK = 180^\circ$ (1)

Mà $\angle IBK = \angle AMC$ (cùng chắn cung BC trong đường tròn (O))

$\angle APC = \angle AMC$ (tính chất đối xứng) $\Rightarrow \angle IBK = \angle APC$ (2)

Lại có $\angle IHK = \angle AHC$ (hai góc đối đỉnh) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle APC + \angle AHC = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $AHCP$ nội tiếp

Cmtt ta cũng có $AHBN$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AHN = \angle ABN$ (góc nội tiếp cùng chắn 1 cung)

Mặt khác $\angle AHP = \angle ACP = \angle ACM$ (tính chất đối xứng và tứ giác nội tiếp)

Và $\angle ABN = \angle ABM$ (đối xứng) mà $\angle ABM + \angle ACM = 180^\circ$ (do tứ giác $ABMC$ nội tiếp)

Nên $\angle AHN + \angle AHP = 180^\circ \Rightarrow N, H, P$ thẳng hàng .