

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) \begin{pmatrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{pmatrix}$

1. Rút gọn biểu thức P

2. Tìm x để $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x} + 1}{8} \geq 1$

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Cho phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m + 6 = 0$. Tìm giá trị của m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ và $x_4 - 2x_3 + 2x_2 - x_1 = 0$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2 + 4y^2 + 8 = x(x + 2) \\ x + y + 3 = 3\sqrt{2y - 1} \end{cases}$

Câu 3. (4,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , có đường cao AH . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O . Đường thẳng MA' cắt các đường thẳng AH, BC theo thứ tự tại N và K . Gọi L là giao điểm của MA và BC . Đường thẳng $A'I$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D . Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm S

- 1) Chứng minh tam giác ANA' là tam giác cân và $MA' \cdot MK = ML \cdot MA$
- 2) Chứng minh $MI^2 = ML \cdot MA$ và tứ giác $NHIK$ là tứ giác nội tiếp
- 3) Gọi T là trung điểm của cạnh SA , chứng minh ba điểm T, I, K thẳng hàng
- 4) Chứng minh nếu $AB + AC = 2BC$ thì I là trọng tâm của tam giác AKS

Câu 4. (1,0 điểm)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $2^x - y^2 + 4y + 61 = 0$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 8$. Chứng minh :

$$\frac{a}{ca + 4} + \frac{b}{ab + 4} + \frac{c}{bc + 4} \leq \frac{1}{16}(a^2 + b^2 + c^2)$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned} 1) P &= \left[\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right] : \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$2) \frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16\sqrt{x} - x - 2\sqrt{x} - 1 - 8\sqrt{x} - 8}{8(\sqrt{x}+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x} - x - 9 \geq 0 \text{ (do } 8(\sqrt{x}+1) > 0 \forall x > 0; x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow x - 6\sqrt{x} + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 9(tm)$$

Vậy $x = 9$

Câu 2.

2.1

$$\text{Phương trình } x^4 - 2mx^2 + 2m + 6 = 0(1)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 (t \geq 0), \text{ ta có: } t^2 - 2mt + 2m + 6 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ pt(2) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = 2m + 6 > 0 \\ S = 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 6 > 0 \\ m > 0 \end{cases} (3)$$

Với điều kiện (3), phương trình (2) có hai nghiệm dương $0 < t_1 < t_2 \Rightarrow$ phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt :

$$x_1 = -\sqrt{t_2} < x_2 = -\sqrt{t_1} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}. \text{ Theo đề bài ta cũng có:}$$

$$x_4 - 2x_3 + 2x_2 - x_1 = 0 \Leftrightarrow x_4 - x_1 = 2(x_3 - x_2) \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 4t_1 (4)$$

$$\text{Theo định lý Vi-et, ta có: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 t_2 = 2m + 6 \end{cases} (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) ta có: } 5t_1 = 2m \text{ và } 4t_1^2 = 2m + 6 \Rightarrow 16m^2 - 50m - 150 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{15}{8}(ktm) \\ m = 5(tm) \end{cases}$$

Vậy $m = 5$ thỏa mãn bài toán.

2.2.

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} xy^2 + 4y^2 + 8 = x(x+2) & (1) \\ x + y + 3 = 3\sqrt{2y-1} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện } 2y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow (x+4)(y^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = y^2 + 2 \end{cases}$$

Thế $x = -4$ vào phương trình thứ 2 ta được:

$$y - 1 = 3\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ (y-1)^2 = 9(2y-1) \end{cases} \Leftrightarrow y = 10 + 3\sqrt{10}$$

$$\text{Với } x = y^2 + 2, \text{ thay vào (2) ta được } y^2 + y + 5 = 3\sqrt{2y-1} \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$y^2 + y + 5 = (y^2 - y + 1) + (2y - 1) + 5 > (2y - 1) + 5 \geq 2\sqrt{5(2y-1)} \geq 3\sqrt{2y-1}$$

Do đó phương trình (3) vô nghiệm

$$\text{Vậy } x = -4; y = 10 + 3\sqrt{10}$$

Ta có $\widehat{A'AC} = 90^\circ - \widehat{AA'C} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{BAH}$ mà AI là phân giác của góc BAC nên AI là phân giác góc $NAA' \Rightarrow AM \perp MA' \Rightarrow \triangle ANA'$ cân tại A

$$MIC = MAC + ACI = MCB + BCI = MCI \Rightarrow MI = MC$$
$$MN.MK = MA'.MK = ML.MA = MI^2 \Rightarrow \Delta IMN \square \Delta KIN(g.g) \Rightarrow \hat{NIK} = 90^0$$

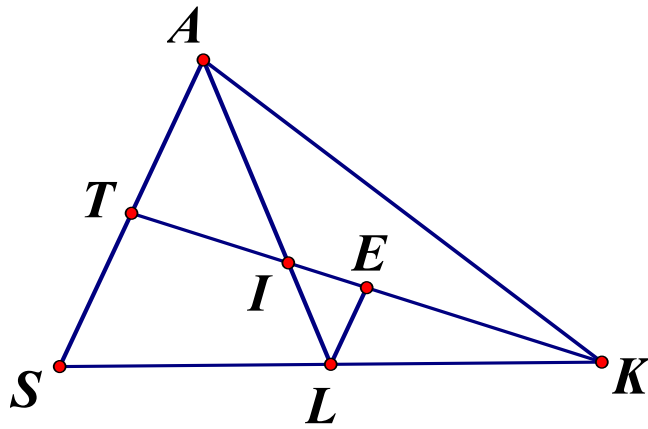
3) Gọi T là trung điểm của cạnh SA , chứng minh ba điểm T, I, K thẳng hàng

Suy ra $AIHS$ là tứ giác nội tiếp, do đó $\widehat{AIS} = \widehat{AHS} = 90^\circ$

$\Rightarrow TIA = MIK$, suy ra ba điểm T, I, K thẳng hàng

4) Chứng minh nếu $AB + AC = 2BC$ thì I là trọng tâm của tam giác AKS

Ta có: $\frac{AI}{IL} = \frac{AB}{BL} = \frac{AC}{CL} = \frac{AB+AC}{BL+CL} = \frac{2BC}{BC} = 2$



Kẻ $LE \parallel SA (E \in TK)$. Ta có: $\frac{LE}{AT} = \frac{IL}{IA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{LE}{ST} = \frac{1}{2}$

Suy ra L là trung điểm của SK mà $\frac{AI}{IL} = 2$ nên I là trọng tâm của tam giác ASK

Câu 4.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 2^x + 65 = (y-2)^2$

Vì 65 chia hết cho 5 và 2^x không chia hết cho 5 với mọi x nguyên dương nên nếu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn phương trình (1) thì $y-2$ là số nguyên không chia hết cho 5. Suy ra $(y-2)^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$

Do đó $2^x \equiv \pm 1 \pmod{5}$, suy ra $x = 2k, k \in \mathbb{N}^+$

Thay vào phương trình đề ta được:

$$2^{2k} + 65 = (y-2)^2 \Leftrightarrow 65 = (y-2+2^k)(y-2-2^k) \quad (2)$$

Vì $k; y$ nguyên dương nên $y-2+2^k > 0$, từ (2) suy ra $y-2-2^k > 0$ và

$y-2+2^k > y-2-2^k$. Do đó:

$$\left[\begin{cases} y-2+2^k = 65 \\ y-2-2^k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} k=5 \\ y=35 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=10 \\ y=35 \end{cases} \right. \right.$$

$$\left[\begin{cases} y-2+2^k = 13 \\ y-2-2^k = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} k=2 \\ y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=4 \\ y=11 \end{cases} \right. \right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm dương là $(10; 35)$ và $(4; 11)$

Câu 5.

Vì a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 8$ nên tồn tại các số thực dương x, y, z sao

cho $a = \frac{2x}{y}; b = \frac{2y}{z}; c = \frac{2z}{x}$

Bất đẳng thức trở thành $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{2x}{y+z} + \frac{2y}{z+x} + \frac{2z}{x+y}$

$$3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right) \geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} + \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} + \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có:

$$2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right) \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$$

Lại có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} &= x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \\ &\geq \frac{4x}{y+z} + \frac{4y}{z+x} + \frac{4z}{x+y} \end{aligned}$$

Ta có bất đẳng thức dễ được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$