

**Câu 1 (2,0 điểm)**

a) Rút gọn biểu thức  $P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$

b) Tính giá trị biểu thức  $Q = \sqrt{28 + 12\sqrt{5}} + \sqrt{28 - 12\sqrt{5}} + 2\sqrt{43 - 30\sqrt{2}}$

**Câu 2 (2,0 điểm)**

a) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{2y - x} + \sqrt{3x + y} = 5 \\ 2\sqrt{2y - x} - 3\sqrt{3x + y} = -5 \end{cases}$$

b) Giải phương trình  $\sqrt{x - 3} + \sqrt{5 - x} = 2x^2 - 7x - 2$

**Câu 3 (1,5 điểm)**

a) Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn các điều kiện  $x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = x\sqrt{2023 + y} + y\sqrt{2023 + x}$

b) Cho hai số thực dương  $a$  và  $b$  thỏa mãn các điều kiện  $a^{1012} - a - 1 = 0$  và  $b^{2024} - b - 3a = 0$ . Hãy so sánh  $a$  và  $b$ .

**Câu 4 (3,5 điểm)** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC, BC$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $CM$  và  $PN$ ,  $I$  là giao điểm của  $AO$  và  $BC$ ,  $D$  là giao điểm của  $MI$  và  $AC$ ,  $K$  là giao điểm của  $AI$  và  $MN$ .

a) Chứng minh rằng  $MK = 2KN$

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng  $AI, BD$  và  $MP$  đồng quy.

c) Trên các tia đối của tia  $BA, CA$  lần lượt lấy các điểm  $C', B'$  (với  $C'$  khác  $B, B'$  khác  $C$ ). Gọi  $F$  là giao điểm của  $BB'$  và  $CC'$ .

Chứng minh  $\frac{FB}{FB'} + \frac{FC}{FC'} \geq 2\sqrt{\frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}}$ , dấu bằng xảy ra khi nào?

**Câu 5 (1,0 điểm)** Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  sao cho số  $2^n + 9 \cdot 2^8$  là số chính phương.

-----Hết-----

## YÊU CẦU CHUNG

\* Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của thí sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.

\* Trong mỗi bài, nếu thí sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan.

\* Ở câu 4 nếu thí sinh không vẽ hình thì cho 0 điểm.

\* Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành 0,25 điểm.

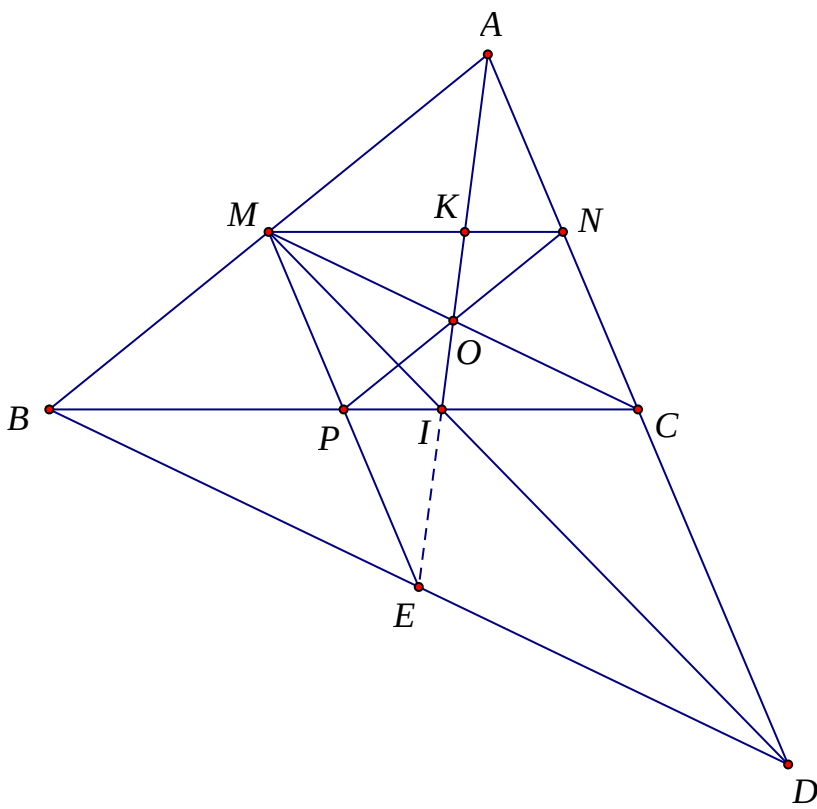
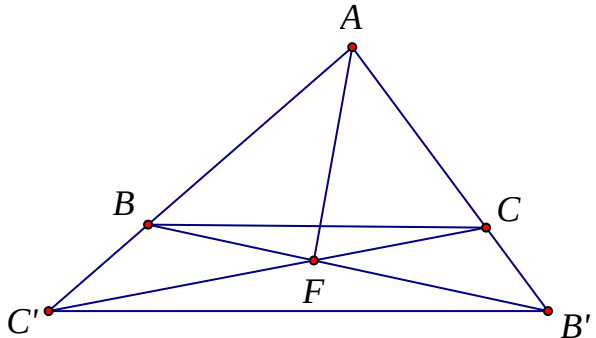
\* Thí sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng bài.

\* Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài.

| Câu                     | Nội dung                                                                                                                                | Điểm |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>1a</b><br>(1,0 điểm) | <b>Rút gọn biểu thức</b> $P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$ |      |
|                         | Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có $P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$        | 0,25 |
|                         | $= \frac{(x+\sqrt{x}+1)+(\sqrt{x}+2)+(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$          | 0,25 |
|                         | $= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$                                           | 0,25 |
|                         | Vậy $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$                                                                        | 0,25 |
| <b>1b</b><br>(1,0 điểm) | <b>Tính giá trị biểu thức</b> $Q = \sqrt{28+12\sqrt{5}} + \sqrt{28-12\sqrt{5}} + 2\sqrt{43-30\sqrt{2}}$                                 |      |
|                         | Ta có $28+12\sqrt{5} = 18+2.3\sqrt{2}\sqrt{10}+10 = (3\sqrt{2}+\sqrt{10})^2$<br>Nên $\sqrt{28+12\sqrt{5}} = 3\sqrt{2}+\sqrt{10}$        | 0,25 |
|                         | Tương tự $\sqrt{28-12\sqrt{5}} =  3\sqrt{2}-\sqrt{10}  = 3\sqrt{2}-\sqrt{10}$                                                           | 0,25 |
|                         | $43-30\sqrt{2} = 25-2.5.3\sqrt{2}+18 = (5-3\sqrt{2})^2$<br>Nên $\sqrt{43-30\sqrt{2}} =  5-3\sqrt{2}  = 5-3\sqrt{2}$                     | 0,25 |
|                         | $Q = (3\sqrt{2}+\sqrt{10}) + (3\sqrt{2}-\sqrt{10}) + 2(5-3\sqrt{2}) = 10$<br>Vậy $Q = 10$                                               | 0,25 |

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>2a</b><br><b>(1,0 điểm)</b> | <b>Giải hệ phương trình</b> $\begin{cases} \sqrt{2y-x} + \sqrt{3x+y} = 5 \\ 2\sqrt{2y-x} - 3\sqrt{3x+y} = -5 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                      |      |
|                                | Điều kiện $2y-x \geq 0; 3x+y \geq 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25 |
|                                | Đặt $a = \sqrt{2y-x}; b = \sqrt{3x+y}$<br>Khi đó hệ đã cho trở thành $\begin{cases} a+b=5 \\ 2a-3b=-5 \end{cases} \quad (1)$                                                                                                                                                                                                                   | 0,25 |
|                                | Giải hệ (1) ta được $a=2; b=3$<br>Lúc đó $\begin{cases} \sqrt{2y-x}=2 \\ \sqrt{3x+y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{-x+2y}=2 \\ \sqrt{3x+y}=3 \end{cases}$                                                                                                                                                                      | 0,25 |
|                                | Do đó ta có $\begin{cases} -x+2y=4 \\ 3x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$<br>Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x, y) = (2; 3)$                                                                                                                                          | 0,25 |
| <b>2b</b><br><b>(1,0 điểm)</b> | <b>Giải phương trình</b> $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = 2x^2 - 7x - 2 \quad (1)$                                                                                                                                                                                                                                                                   |      |
|                                | Điều kiện $x-3 \geq 0; 5-x \geq 0$ nên $3 \leq x \leq 5$                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,25 |
|                                | $(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x-3}-1) + (\sqrt{5-x}-1) = (2x+1)(x-4)$                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,25 |
|                                | $\Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{4-x}{\sqrt{5-x}+1} = (2x+1)(x-4)$<br>$\Leftrightarrow (x-4) \left[ 2x+1 + \frac{1}{\sqrt{5-x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} \right] = 0$                                                                                                                                                       | 0,25 |
|                                | $\Leftrightarrow x=4 \text{ (vì } 2x+1 + \frac{1}{\sqrt{5-x}+1} > 7 > \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} \text{ với } 3 \leq x \leq 5)$<br>Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=4$                                                                                                                                                                      | 0,25 |
|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |
| <b>3a</b><br><b>(1,0 điểm)</b> | <b>Cho các số thực</b> $x, y$ <b>thỏa mãn các điều kiện</b> $x \geq 0, y \geq 0, x+y=2$<br><b>Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức</b><br>$A = x\sqrt{2023+y} + y\sqrt{2023+x}$                                                                                                                                                |      |
|                                | Nhận xét: Với $a, b, x, y$ là các số thực ta luôn có<br>$(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2) \quad (*)$<br>Đẳng thức xảy ra khi $ay = bx$<br>Thật vậy $(*) \Leftrightarrow a^2x^2 + 2axby + b^2y^2 \leq a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2$<br>$\Leftrightarrow a^2y^2 - 2axby + b^2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ay-bx)^2 \geq 0$                  | 0,25 |
|                                | Áp dụng (*) ta có $A^2 = (\sqrt{x}\sqrt{2023+x} + \sqrt{y}\sqrt{2023+y})^2$<br>$\leq (x+y)(2023x+xy+2023y+xy) = 2(2023.2+2xy)$<br>$\leq 4.2023 + 4\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 4.2023 + 4 = 4.2024$<br>Suy ra $A \leq 2\sqrt{2024}$<br>Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$<br>Do đó giá trị lớn nhất của A là $2\sqrt{2024}$ khi $x=y=1$ | 0,25 |
|                                | Mặt khác $A = x\sqrt{2023+y} + y\sqrt{2023+x} - (x+y)\sqrt{2023} + 2\sqrt{2023}$                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,25 |
|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |      |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                                | $= x(\sqrt{2023+y} - \sqrt{2023}) + y(\sqrt{2023+x} - \sqrt{2023}) + 2\sqrt{2023}$ <p>Vì <math>x \geq 0, y \geq 0</math> nên <math>A \geq 2\sqrt{2023}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |      |
|                                | <p>Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi <math>x=0, y=2</math> hoặc <math>x=2, y=0</math></p> <p>Do đó giá trị nhỏ nhất của A là <math>2\sqrt{2023}</math> khi <math>x=0, y=2</math> hoặc <math>x=2, y=0</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25 |
| <b>3b</b><br><b>(0,5 điểm)</b> | <p><b>Cho hai số thực dương <math>a</math> và <math>b</math> thỏa mãn các điều kiện <math>a^{1012} - a - 1 = 0</math> và <math>b^{2024} - b - 3a = 0</math>. Hãy so sánh <math>a</math> và <math>b</math>.</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |      |
|                                | <p>Ta giải bài toán tổng quát:</p> <p>Cho hai số thực dương <math>a</math> và <math>b</math> thỏa mãn các điều kiện <math>a^n - a - 1 = 0</math> và <math>b^{2n} - b - 3a = 0</math> với <math>n &gt; 1, n \in \mathbb{N}</math>. Hãy so sánh <math>a</math> và <math>b</math>.</p> <p>Do <math>a &gt; 0</math> và <math>a^n = a + 1 &gt; 1 \Rightarrow a &gt; 1</math>. Từ đó <math>a^{2n} = (a + 1)^2 &gt; 4a</math></p> <p>Do đó <math>\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} = \frac{b^{2n}}{a^{2n}} = \frac{b + 3a}{a^{2n}} &lt; \frac{b + 3a}{4a}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,25 |
|                                | <p>Nếu <math>a \leq b</math> thì <math>\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} &lt; \frac{b + 3a}{4a} \leq \frac{b + 3b}{4a} = \frac{b}{a}</math></p> <p>Do đó <math>\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} &lt; \frac{b}{a}</math>. Điều này vô lí vì <math>\frac{b}{a} \geq 1</math></p> <p>Chứng tỏ <math>a &gt; b</math> với mọi <math>n &gt; 1, n \in \mathbb{N}</math></p> <p>Áp dụng bài toán tổng quát cho <math>n = 1012</math> ta có kết luận <math>a &gt; b</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,25 |
| <b>4</b>                       | <p><b>Cho tam giác <math>ABC</math>. Các điểm <math>M, N, P</math> lần lượt là trung điểm của các cạnh <math>AB, AC, BC</math>. Gọi <math>O</math> là giao điểm của <math>CM</math> và <math>PN</math>, <math>I</math> là giao điểm của <math>AO</math> và <math>BC</math>, <math>D</math> là giao điểm của <math>MI</math> và <math>AC</math>, <math>K</math> là giao điểm của <math>AI</math> và <math>MN</math>.</b></p> <p><b>a) Chứng minh rằng <math>MK = 2KN</math></b></p> <p><b>b) Chứng minh rằng ba đường thẳng <math>AI, BD</math> và <math>MP</math> đồng quy.</b></p> <p><b>c) Trên các tia đối của tia <math>BA, CA</math> lần lượt lấy các điểm <math>C', B'</math> (với <math>C'</math> khác <math>B, B'</math> khác <math>C</math>). Gọi <math>F</math> là giao điểm của <math>BB'</math> và <math>CC'</math>.</b></p> <p><b>Chứng minh <math>\frac{FB}{FB'} + \frac{FC}{FC'} \geq 2\sqrt{\frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}}</math>, dấu bằng xảy ra khi nào?</b></p> |      |

|                                |                                                                                                                                                                                                                                 |      |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                                |  <p style="text-align: center;"><i>Học sinh vẽ đúng để giải Câu 4a cho 0,5 điểm</i></p>                                                       | 0,5  |
| <b>4a</b><br><b>(1,0 điểm)</b> | Từ giả thiết, ta có $MNCP$ là hình bình hành nên $O$ là trung điểm của $MC$                                                                                                                                                     | 0,5  |
|                                | Tam giác $AMC$ có hai trung tuyến $MN$ và $AO$ cắt nhau tại $K$ . Suy ra $K$ là trọng tâm Tam giác $AMC$ . Vậy $MK = 2KN$                                                                                                       | 0,5  |
| <b>4b</b><br><b>(1,0 điểm)</b> | Tứ giác $MNCP$ là hình bình hành tâm $O$ và $O \in KI$ , kết hợp $MK = 2KN$ Nên có $IC = 2IP$                                                                                                                                   | 0,25 |
|                                | Vì $MP$ song song với $AD$ nên $\frac{MP}{CD} = \frac{IP}{IC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow CD = 2MP$                                                                                                                           |      |
|                                | Gọi $E$ là giao điểm của $MP$ và $BD$ . Khi đó $E$ là trung điểm $BD$<br>Mà $CA = 2MP$ nên $CD = CA$                                                                                                                            | 0,25 |
|                                | Tam giác $\triangle ABD$ có $DM, BC$ là hai đường trung tuyến cắt nhau tại $I$ nên $I$ là trọng tâm tam giác $\triangle ABD$<br>Do đó $I$ nằm trên đường thẳng $AE$ . Vậy ba đường thẳng $AI, BD$ và $MP$ đồng quy tại điểm $E$ | 0,25 |
| <b>4c</b><br><b>(1,0 điểm)</b> |                                                                                                                                             |      |
|                                | Áp dụng tính chất nếu hai tam giác có cùng chiều cao thì tỷ lệ diện tích giữa chúng bằng tỷ lệ giữa hai đáy ứng với chiều cao của nó, ta có                                                                                     | 0,25 |

|                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |      |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                             | $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle AFB'}} = \frac{FB}{FB'}; \frac{S_{\triangle AFC}}{S_{\triangle AFC'}} = \frac{FC}{FC'} \text{ Suy ra } \frac{FB}{FB'} + \frac{FC}{FC'} = \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle AFB'}} + \frac{S_{\triangle AFC}}{S_{\triangle AFC'}} \quad (1)$           |      |
|                             | Mặt khác, theo BĐT Co-si ta có $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle AFB'}} + \frac{S_{\triangle AFC}}{S_{\triangle AFC'}} \geq 2\sqrt{\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle AFB'}} \cdot \frac{S_{\triangle AFC}}{S_{\triangle AFC'}}} \quad (2)$                                              | 0,25 |
|                             | Mặt khác $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle AFB'}} \cdot \frac{S_{\triangle AFC}}{S_{\triangle AFC'}} = \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle AFC'}} \cdot \frac{S_{\triangle AFC}}{S_{\triangle AFB'}} = \frac{AB}{AC'} \cdot \frac{AC}{AB'} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'} \quad (3)$ | 0,25 |
|                             | Từ (1), (2) và (3) ta có $\frac{FB}{FB'} + \frac{FC}{FC'} \geq \sqrt{\frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}}$                                                                                                                                                                                         | 0,25 |
|                             | Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{S_{\triangle AFC}}{S_{\triangle AMC'}} = \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle AFB'}} \text{ hay } \frac{FB}{FB'} = \frac{FC}{FC'}$<br>Điều này tương đương với hai đường thẳng $BC$ và $B'C'$ song song với nhau.                                         | 0,25 |
| <b>5<br/>(1,0<br/>điểm)</b> | <b>Tìm tất cả các số tự nhiên <math>n</math> sao cho số <math>2^n + 9 \cdot 2^8</math> là số chính phương.</b>                                                                                                                                                                                   |      |
|                             | Giả sử $2^n + 9 \cdot 2^8 = m^2$ với $m \in \mathbb{N}$ . Khi đó<br>$2^n = m^2 - 9 \cdot 2^8 \Leftrightarrow 2^n = m^2 - 3^2 \cdot (2^4)^2 \Leftrightarrow 2^n = m^2 - 48^2$<br>$\Leftrightarrow 2^n = (m + 48)(m - 48)$                                                                         | 0,25 |
|                             | Từ đó có $\begin{cases} m + 48 = 2^p \\ m - 48 = 2^q \end{cases} \text{ với } p, q \in \mathbb{N}, p > q, p + q = n$<br>Suy ra $2^p - 2^q = 96 \Leftrightarrow 2^q (2^{p-q} - 1) = 2^5 \cdot 3$<br>Nhận xét $q = 0$ không thỏa mãn bài toán.                                                     | 0,25 |
|                             | Do $p, q \in \mathbb{N}, p > q > 0$ nên $2^{p-q} - 1$ là số lẻ và $2^q$ là số chẵn.<br>Suy ra $q = 5$ và $p - q = 2$ nên $p = 7$ . Lúc đó $n = 5 + 7 = 12$                                                                                                                                       | 0,25 |
|                             | Thử lại có $2^{12} + 9 \cdot 2^8 = 80^2$<br>Vậy $n = 12$                                                                                                                                                                                                                                         | 0,25 |