

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (5,0 điểm) Cho các dãy số $(u_n), (v_n)$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 3, v_1 = 2, \\ u_{n+1} + v_{n+1} = (u_n + v_n)^2 + v_n^2, \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots \\ v_{n+1} = 2u_n v_n, \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $u_n^2 - 2v_n^2 = 1$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

b) Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$.

Câu 2. (5,0 điểm) Cho bộ số thực dương (a, b, c) , chứng minh rằng

a) Tồn tại một hoán vị (x, y, z) của (a, b, c) sao cho

$$\frac{xy}{a^2 + 2bc} + \frac{yz}{b^2 + 2ca} + \frac{zx}{c^2 + 2ab} \leq 1.$$

b) Với mọi hoán vị (x, y, z) của (a, b, c) thì luôn có

$$x \cdot \sqrt{\frac{bc + 2a^2}{b(c + 2a)^3}} + y \cdot \sqrt{\frac{ca + 2b^2}{c(a + 2b)^3}} + z \cdot \sqrt{\frac{ab + 2c^2}{a(b + 2c)^3}} \geq 1.$$

Câu 3. (5,0 điểm) Số nguyên dương n được gọi là “tốt” nếu thỏa mãn đồng thời:

(i) Với mọi ước dương d của n thì các số $1^d, 2^d, 3^d, \dots, 46^d$ đều có số dư phân biệt khi chia cho 47.

(ii) Nếu ký hiệu $\tau(n)$ là số các ước dương của n thì n chia hết cho $\tau(n)^2$.

a) Chứng minh rằng nếu n là số “tốt” thì n là số chính phương.

b) Tìm tất cả các số “tốt” không vượt quá 2025.

Câu 4. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn (O) có H là trực tâm. Gọi A', D lần lượt là điểm đối xứng của A qua BC và qua O . Gọi P là điểm trên BC sao cho AP vuông góc với OH (giả sử các điểm A, D, P không thẳng hàng). Gọi H' là trực tâm của tam giác ADP .

a) Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAC} = 60^\circ$ thì $H'D$ đi qua điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{BC}$ của (O) .

b) Chứng minh rằng $H'A'$ vuông góc với OP , đồng thời nếu $\widehat{BAC} = 45^\circ$ thì H' và O đối xứng với nhau qua BC .

----- HẾT -----

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Câu 1. (5,0 điểm) Cho các dãy số $(u_n), (v_n)$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 3, v_1 = 2, \\ u_{n+1} + v_{n+1} = (u_n + v_n)^2 + v_n^2, \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots \\ v_{n+1} = 2u_n v_n, \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $u_n^2 - 2v_n^2 = 1$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

b) Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$.

Câu 2. (5,0 điểm) Cho bộ số thực dương (a, b, c) , chứng minh rằng

a) Tồn tại một hoán vị (x, y, z) của (a, b, c) sao cho

$$\frac{xy}{a^2 + 2bc} + \frac{yz}{b^2 + 2ca} + \frac{zx}{c^2 + 2ab} \leq 1.$$

b) Với mọi hoán vị (x, y, z) của (a, b, c) thì luôn có

$$x \cdot \sqrt{\frac{bc + 2a^2}{b(c + 2a)^3}} + y \cdot \sqrt{\frac{ca + 2b^2}{c(a + 2b)^3}} + z \cdot \sqrt{\frac{ab + 2c^2}{a(b + 2c)^3}} \geq 1.$$

Câu 3. (5,0 điểm) Số nguyên dương n được gọi là “tốt” nếu thỏa mãn đồng thời:

(i) Với mọi ước dương d của n thì các số $1^d, 2^d, 3^d, \dots, 46^d$ đều có số dư phân biệt khi chia cho 47.

(ii) Nếu ký hiệu $\tau(n)$ là số các ước dương của n thì n chia hết cho $\tau(n)^2$.

a) Chứng minh rằng nếu n là số “tốt” thì n là số chính phương.

b) Tìm tất cả các số “tốt” không vượt quá 2025.

Câu 4. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn (O) có H là trực tâm. Gọi A', D lần lượt là điểm đối xứng của A qua BC và qua O . Gọi P là điểm trên BC sao cho AP vuông góc với OH (giả sử các điểm A, D, P không thẳng hàng). Gọi H' là trực tâm của tam giác ADP .

a) Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAC} = 60^\circ$ thì $H'D$ đi qua điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{BC}$ của (O) .

b) Chứng minh rằng $H'A'$ vuông góc với OP , đồng thời nếu $\widehat{BAC} = 45^\circ$ thì H' và O đối xứng với nhau qua BC .

----- HẾT -----

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 5. (5,0 điểm) Cho hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ xác định bởi $f(m) = \begin{cases} m+3 & \text{khi } m \not\equiv 2 \\ \frac{m}{2} & \text{khi } m \equiv 2 \end{cases}$.

- a) Tìm tất cả các số nguyên m sao cho $f(f(f(m))) = 1$.
b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên lẻ k , có đúng ba số nguyên phân biệt m sao cho $f(f(f(m))) = k$.
c) Với số nguyên chẵn k , hỏi có bao nhiêu số nguyên phân biệt m sao cho $f(f(f(m))) = k$?

Câu 6. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC không cân, có trọng tâm G và nội tiếp trong đường tròn (O) , lấy điểm $A' \in (O)$ sao cho AA' song song với BC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, CA, AB . Gọi D, E, F là điểm đối xứng của chân các đường phân giác trong góc A, B, C của tam giác ABC lần lượt qua M, N, P . Giả sử EF cắt BC tại D' và gọi (ω_A) là đường tròn đường kính DD' .

- a) Chứng minh rằng OA' tiếp xúc với (ω_A) tại A' .
b) Tính tỉ số phương tích từ G đến (O) và phương tích từ G đến (ω_A) .
c) Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác DEF nằm trên đường thẳng OG .

Câu 7. (5,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f, g: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn đồng thời:

(i) $f(2024x^2) \leq 2024f(g(x))$ với mọi $x > 0$;

(ii) $f(x+y^2) \geq f(g(y)) + \frac{y^2 f(x)^3}{g(yf(x))}$ với mọi $x, y > 0$.

Câu 8. (5,0 điểm) Trong buổi sinh hoạt ngoại khoá, có 100 cái ghế được xếp thành hai hàng tạo thành 50 cặp đối diện nhau. Cô giáo cho 100 em học sinh ngồi vào các ghế, mỗi ghế có đúng một học sinh.

- a) Giả sử mỗi học sinh chỉ quen với người ngồi bên cạnh hoặc đối diện mình, hỏi cần chọn ra ít nhất bao nhiêu em sao cho mỗi em không được chọn thì quen với ít nhất một em được chọn?
b) Giả sử có một học sinh nào đó đi ra ngoài và bỏ lại một ghế trống. Cô giáo sẽ chọn một học sinh tùy ý ở hàng ghế không có ghế trống đến ngồi vào ghế đang trống. Cô giáo có thể thực hiện thao tác như thế nhiều lần. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn lần, cô giáo không thể xếp vị trí của các học sinh sao cho em nào cũng ngồi vào ghế đối diện với ghế mình ngồi ban đầu.

----- HẾT -----

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

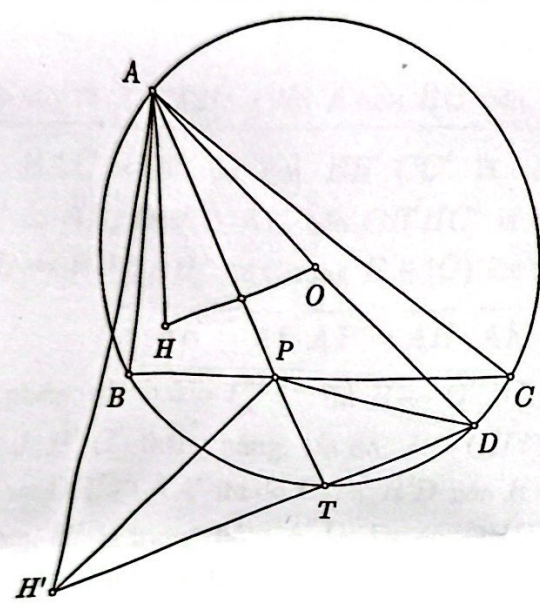
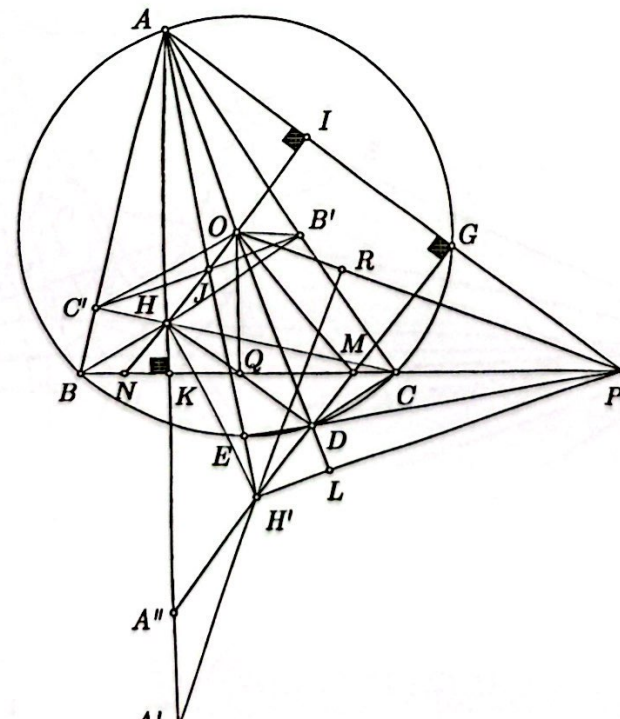
Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM NGÀY 1

Câu	Nội dung	Điểm
	Cho các dãy số $(u_n), (v_n)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3, v_1 = 2, \\ u_{n+1} + v_{n+1} = (u_n + v_n)^2 + v_n^2, \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots \\ v_{n+1} = 2u_n v_n, \end{cases}$ a) Chứng minh rằng $u_n^2 - 2v_n^2 = 1$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$ b) Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$.	5,0
	a) Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh rằng $u_n^2 - 2v_n^2 = 1$ với $n = 1, 2, 3, \dots$ (1) * Với $n = 1$, ta có $u_1^2 - 2v_1^2 = 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$. * Giả sử $n = k \geq 1$, ta có : $u_k^2 - 2v_k^2 = 1$. Xét $n = k + 1$ thì $u_{k+1}^2 - 2v_{k+1}^2 = (u_k^2 + 2v_k^2)^2 - 2(2u_k v_k)^2 = (u_k^2 - 2v_k^2)^2 = 1.$ Theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra (1) được chứng minh.	2,0
	b) Ta có $u_{n+1} - v_{n+1}\sqrt{2} = u_n^2 + 2v_n^2 - (2u_n v_n)\sqrt{2} = (u_n - v_n\sqrt{2})^2$.	1,0
1	Thực hiện tương tự, ta có $u_{n+1} + v_{n+1}\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^{2^n} = (\sqrt{2} - 1)^{2^{n+1}}$ (2) với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$. Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} u_n + v_n\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^{2^n} \\ u_n - v_n\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^{2^n} \end{cases}$	1,0
	Do đó $\begin{cases} u_n = \frac{1}{2}[(\sqrt{2} + 1)^{2^n} + (\sqrt{2} - 1)^{2^n}] \\ v_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(\sqrt{2} + 1)^{2^n} - (\sqrt{2} - 1)^{2^n}] \end{cases}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$ Vậy ta tính được $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \cdot \frac{(\sqrt{2} + 1)^{2^n} + (\sqrt{2} - 1)^{2^n}}{(\sqrt{2} + 1)^{2^n} - (\sqrt{2} - 1)^{2^n}} = \sqrt{2}$.	1,0
	Ghi chú. Ở câu b), ta có thể đặt dãy $x_n = \frac{u_n}{v_n}$ và có được $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$. Từ đó, có thể biến đổi được $x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n}$. Đến đây suy ra $x_n \geq \sqrt{2}$, $\forall n \geq 1$. Đồng thời xét hiệu $x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} \leq 0$, do đó dãy x_n giảm và bị chặn dưới nên dãy hội tụ và ta tìm được ngay $\lim x_n = \sqrt{2}$.	

Câu	Nội dung	Điểm
	Cho bộ số thực dương (a, b, c), chứng minh rằng a) Tồn tại một hoán vị (x, y, z) của (a, b, c) sao cho $\frac{xy}{a^2 + 2bc} + \frac{yz}{b^2 + 2ca} + \frac{zx}{c^2 + 2ab} \leq 1.$ b) Với mọi hoán vị (x, y, z) của (a, b, c) thì luôn có $x \cdot \sqrt{\frac{bc + 2a^2}{b(c + 2a)^3}} + y \cdot \sqrt{\frac{ca + 2b^2}{c(a + 2b)^3}} + z \cdot \sqrt{\frac{ab + 2c^2}{a(b + 2c)^3}} \geq 1.$	5,0
	a) Ta có thể chọn bộ $(x, y, z) = (b, c, a)$ và quy về chứng minh $\frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + 2ca} + \frac{ab}{c^2 + 2ab} \leq 1.$	0,5
	Biến đổi tương đương, ta được $\left(1 - \frac{2bc}{a^2 + 2bc}\right) + \left(1 - \frac{2ca}{b^2 + 2ca}\right) + \left(1 - \frac{2ab}{c^2 + 2ab}\right) \geq 3 - 2$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq 1.$	1,0
2	Theo bất đẳng thức AM-GM, $a^2 + 2bc \leq a^2 + b^2 + c^2$ nên thực hiện tương tự thì $\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1.$ (Ta cũng có thể dùng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz trực tiếp cho vế trái). b) Theo bất đẳng thức Holder thì $\left(c + \frac{a^2}{b} + \frac{a^2}{b}\right)(c + a + b)(c + b + a)$ $\geq \left(\sqrt[3]{c \cdot c \cdot c} + \sqrt[3]{\frac{a^2}{b} \cdot a \cdot b} + \sqrt[3]{\frac{a^2}{b} \cdot b \cdot a}\right)^3 = (c + 2a)^3.$ Vì thế nên $\sqrt{\frac{c + 2a^2/b}{(c + 2a)^3}} \geq \frac{1}{a + b + c} \text{ và } x \sqrt{\frac{bc + 2a^2}{b(c + 2a)^3}} \geq \frac{x}{a + b + c}.$	0,5
	Do đó, thực hiện tương tự các đánh giá khác và cộng lại, ta được $x \sqrt{\frac{bc + 2a^2}{b(c + 2a)^3}} + y \sqrt{\frac{ca + 2b^2}{c(a + 2b)^3}} + z \sqrt{\frac{ab + 2c^2}{a(b + 2c)^3}} \geq \frac{x + y + z}{a + b + c} = 1.$ Bất đẳng thức đã cho luôn đúng với mọi hoán vị (x, y, z) của (a, b, c).	2,0
	Ghi chú. Bất đẳng thức ở câu b) có thể chứng minh bằng cách dùng khảo sát hàm hoặc khai triển trực tiếp rồi dùng bất đẳng thức AM-GM.	1,0

Câu	Nội dung	Điểm
	Số nguyên dương n được gọi là "tốt" nếu thoả mãn đồng thời: (i) Với mọi ước dương d của n thì $1^d, 2^d, 3^d, \dots, 46^d$ đều có các số dư phân biệt khi chia cho 47. (ii) Nếu ký hiệu $\tau(n)$ là số các ước dương của n thì n chia hết cho $\tau(n)^2$. a) Chứng minh rằng nếu n là số "tốt" thì n là số chính phương. b) Tìm tất cả các số "tốt" không vượt quá 2025.	5,0
	a) Xét số tốt n. Trước hết, ta thấy nếu n chẵn thì $d = 2$ là một ước của n; tuy nhiên, khi đó, 1^2 và 46^2 đều cùng chia 47 dư 1, không thoả mãn (i). Do đó, n phải lẻ.	0,5
	Ta thấy $n = 1$ là số tốt và nó là số chính phương. Bây giờ xét $n > 1$ và đặt $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ với $p_1, p_2, \dots, p_k$ là các số nguyên tố lẻ phân biệt và $a_1, a_2, \dots, a_k$ nguyên dương. Vì $\tau(n)^2 \mid n$ nên $\tau(n)$ cũng lẻ. ✓ Ta có $\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ lẻ nên $a_1, a_2, \dots, a_k$ đều chẵn. Vì thế nên n phải là số chính phương. Do đó, số n tốt thì nó là số chính phương. ✓	1,0
	b) Chú ý nếu $k \geq 3$ thì $n \geq (3 \cdot 5 \cdot 7)^2 > 2025$, không thoả mãn. Do đó $k \in \{1; 2\}$.	0,5
3	Ta xét các trường hợp sau đây: (1) Nếu $k = 1$ thì $n = p^{2m}$ với p là số nguyên tố lẻ và $m \in \mathbb{Z}^+$. Để ý nếu $2m \geq 6$ thì $\tau(n) \geq 7$ nên $p \geq 7$ và $n \geq 7^6 > 2025$, không thoả mãn. Do đó, ta xét nếu $2m = 2$ thì $\tau(n) = 3$ nên $p = 3$ và $n = 9$; còn nếu $2m = 4$ thì $\tau(n) = 5$ nên $p = 5$ và $n = 5^4 = 625$. Kiểm tra được $n = 9, n = 625$ đều thoả mãn (ii).	0,5 + 0,5
	Nếu $k = 2$ thì $n = p^{2a} q^{2b}$ với p, q là số nguyên tố lẻ phân biệt và $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Chú ý rằng nếu cả $2a$ và $2b \geq 4$ thì $n \geq (3 \cdot 5)^4 > 2025$, không thoả mãn. Vì thế, ta có thể giả sử $2b = 2$, kéo theo $3 \mid \tau(n)$ nên $p = 3$ hoặc $q = 3$. ✓ + Nếu $q = 3$ thì $n = 9p^{2a}$, lúc đó nếu $2a = 2$ thì $\tau(n) = 9$ nên $9^2 \mid n$, không thoả mãn; do đó $2a \geq 4$ nên $n \geq 9 \cdot 5^4 > 2025$, cũng không thoả mãn. ✓ + Nếu $p = 3$ thì $n = 3^{2a} q^2$; nếu $2a = 2$ thì vô lý như trên, vì thế $2a > 2$. Nhưng nếu $2a \geq 6$ thì $n \geq 3^6 \cdot 5^2 > 2025$, không thoả mãn. Vì thế $2a = 4$ và $5 \mid \tau(n)$ nên $q = 5$, kéo theo $n = 2025$. Ta thấy số này thoả mãn (ii). Vì thế $n \in \{9; 625; 2025\}$. ✓	1,0 + 0,5
	Ta sẽ chứng minh rằng các số n nêu trên đều thoả mãn (i). Xét ước nguyên dương d tùy ý của n. Giả sử có $u, v \in \{1; 2; \dots; 46\}$ và $u \neq v$ mà $u^d \equiv v^d \pmod{47}$. Gọi s là nghịch đảo của v modulo 47 thì đặt $t = us$, ta có $t^d \equiv 1 \pmod{47}$.	0,5
	Tiếp theo, ta đặt $h = \text{ord}_{47}(t)$ thì $h \mid d$ và theo định lý Fermat nhỏ thì $h \mid 46$ nên $h \mid \gcd(d, 46)$. Chú ý $46 = 2 \cdot 23$ với 23 là số nguyên tố nên luôn có $\gcd(d, 46) = 1$ kéo theo $h = 1$. Khi đó, ta sẽ có $t \equiv 1 \pmod{47} \Leftrightarrow us \equiv 1 \pmod{47}$. Lại nhân hai vế của đồng dư thức này cho v thì có $u \equiv v \pmod{47}$, vô lý. Vì thế nên mọi ước nguyên dương d của các số n đã nêu đều thoả mãn điều kiện (i). Vậy tất cả các giá trị n cần tìm là 1, 9, 625, 2025.	1,0

Câu	Nội dung	Điểm
	Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn (O) có H là trực tâm. Gọi A', D lần lượt là điểm đối xứng của A qua BC và qua O. Gọi P là điểm trên BC sao cho AP vuông góc với OH (giả sử các điểm A, D, P không thẳng hàng). Gọi H' là trực tâm của tam giác ADP. a) Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAC} = 60^\circ$ thì $H'D$ đi qua điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{BC}$ của (O). b) Chứng minh rằng $H'A'$ vuông góc với OP, đồng thời nếu $\widehat{BAC} = 45^\circ$ thì H' và O đối xứng với nhau qua BC.	5,0
4	 a) Gọi T là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{BC}$ của (O). Vì $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $AH = 2AO \cdot \cos 60^\circ = AO$ hay $\triangle AHO$ cân tại A. Mà $AP \perp HO$ nên AP là tia phân giác góc $\widehat{HAO}$. Mặt khác, ta cũng có $\widehat{BAH} = \widehat{CAO}$ nên AP là tia phân giác góc $\widehat{BAC}$ hay A, P, T thẳng hàng. Do AD là đường kính của (O) nên $\widehat{ATD} = 90^\circ$, từ đây suy ra được $H'D \perp AP$ tại T. Vậy $H'D$ đi qua điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{BC}$ của đường tròn (O).	1,0
	b) Ta sẽ giải bài toán này bằng hai cách như sau. 	

Cách 1.

Gọi R là hình chiếu của H' lên OP , Q là hình chiếu của O lên BC . $H'D$ lần lượt cắt BC và (O) tại M và $G (\neq D)$. Giả sử OH lần lượt cắt BC và AP tại N và I . Từ đó ta có:

$$\overline{PR} \cdot \overline{PO} = \overline{PL} \cdot \overline{PH'} = \overline{PG} \cdot \overline{PA} = \overline{PM} \cdot \overline{PK} \text{ nên } \widehat{KRP} = \widehat{OMP}.$$

Mặt khác, Q là trung điểm HD , $NH \parallel DM$ suy ra Q cũng là trung điểm MN nên

$$\widehat{OMP} = \widehat{ONB} = 180^\circ - \widehat{KAP} \Rightarrow \widehat{KRP} = 180^\circ - \widehat{KAP}.$$

Gọi $X = RH' \cap AH$ thì do $KRPX$ nội tiếp ($\widehat{K} = \widehat{R} = 90^\circ$) nên ta có

$$\widehat{KXP} = 180^\circ - \widehat{KRP} = \widehat{KAP}.$$

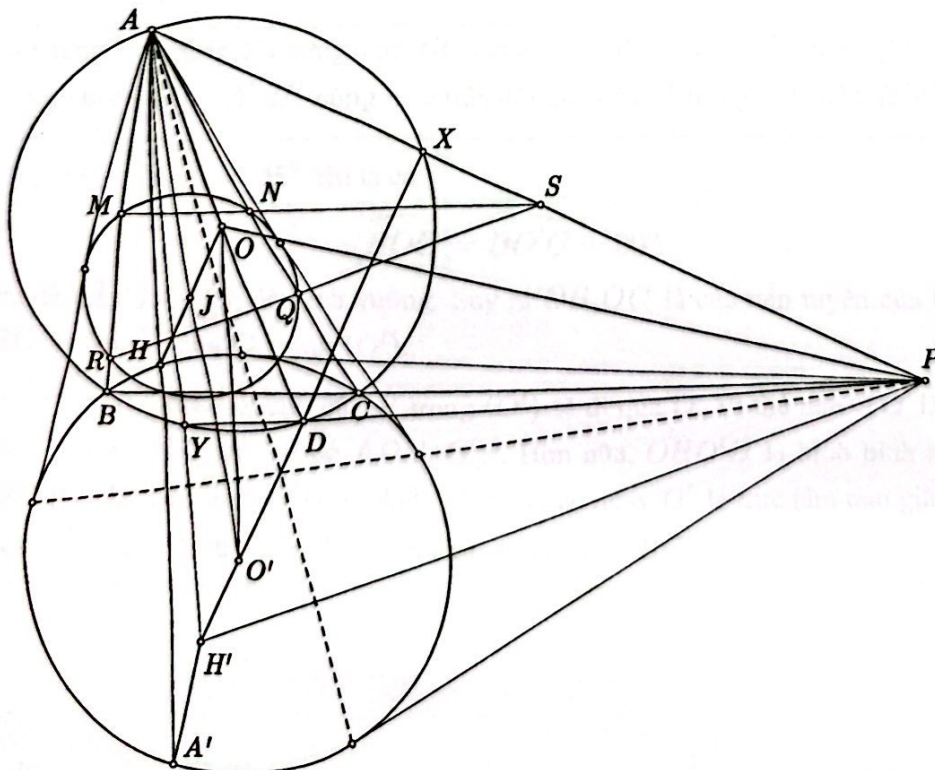
Từ đó suy ra X đối xứng với A qua BC nên $X \equiv A'$. Vậy ta có ngay $H'A' \perp OP$.

Nếu $\widehat{BAC} = 45^\circ$ thì gọi BB', CC' là các đường cao của ABC , dễ thấy $OB' \perp AB$, $OC' \perp AC$ nên $OB'HC'$ là hình bình hành. Gọi $J = AH' \cap OH$ và $E = PD \cap AH'$ thì rõ ràng $E \in (O)$. Dễ thấy $PIJE$ và $HIPK$ nội tiếp nên

$$\overline{AJ} \cdot \overline{AE} = \overline{AI} \cdot \overline{AP} = \overline{AH} \cdot \overline{AK} = \overline{AB'} \cdot \overline{AC} = \overline{AC'} \cdot \overline{AB}.$$

Xét phép nghịch đảo $I_A^{\overline{AH} \cdot \overline{AK}}$ thì $B \rightarrow C'$, $C \rightarrow B'$, $E \rightarrow J$, mà (EBC) đi qua A nên J, B', C' thẳng hàng. Do đó, $J = OH \cap B'C'$ nên J là trung điểm OH . Đặt $A'' = DH' \cap AA'$ thì do $OH \parallel H'D$ nên H là trung điểm AA'' và theo bổ đề hình thang, H' là trung điểm $A''D$. Do đó, $OH H'D$ là hình bình hành, $BHCD$ cũng là hình bình hành nên O, H' đối xứng qua trung điểm BC , tức là đối xứng qua BC .

Cách 2.

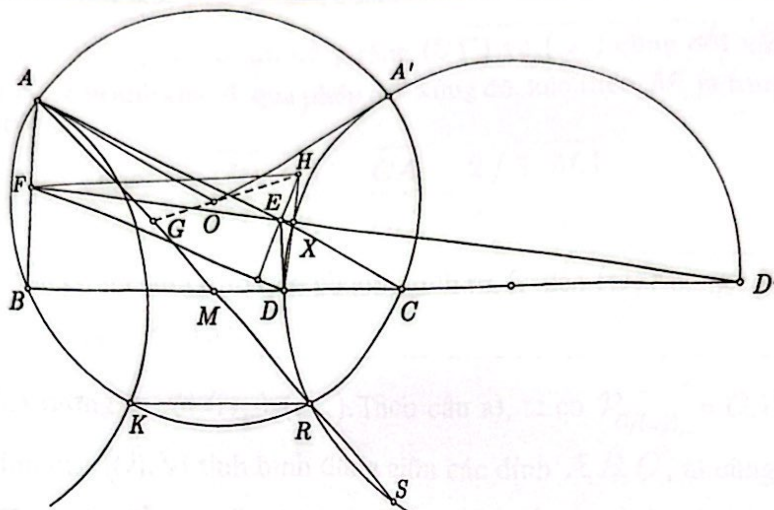


Ta sẽ chứng minh rằng $H'A'$ là đường đối cực của P đối với (O). Thật vậy, xét tam giác APH' có trực tâm D và (O) là đường tròn đường kính AD. Cho PA, PD cắt lại (O) lần lượt tại X, Y thì $X \in H'D$ và $Y \in H'A$. Theo tính chất của tứ giác toàn phần $AXDY.PH'$ thì đối cực của P trong (O) sẽ đi qua H'.	0,5
Gọi J là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC thì (J) đi qua trung điểm M, N của AB, AC và qua chân đường cao Q, R ứng với đỉnh B, C trong tam giác ABC. Đặt $S = MN \cap QR$ thì ta thấy rằng $\overline{SM} \cdot \overline{SN} = \overline{SQ} \cdot \overline{SR}$ nên S có cùng phương tích đến các đường tròn đường kính AO, AH. Do đó, AS chính là trục đẳng phương của hai đường tròn này. Gọi U, V lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, AO thì theo tính chất trục đẳng phương, ta có $UV \perp AS, \text{ mà } UV \parallel OH \text{ nên } AS \perp OH,$ vì thế, A, S, P thẳng hàng và vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên S là trung điểm của đoạn thẳng AP.	0,5
Ngoài ra, theo tính chất của tứ giác toàn phần $MNQR.AS$ thì đối cực của A trong (J) sẽ đi qua S. Bây giờ gọi Ω là phép vị tự tâm A, tỷ số 2 thì $\Omega : S \rightarrow P$. Gọi O' là điểm đối xứng của O qua BC thì dễ thấy $AH = OO'$ nên $AHO'O$ là hình bình hành, kéo theo J là trung điểm O'. Ngoài ra, để ý rằng O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'BC$. Ta có $\Omega : (J) \rightarrow (O')$ nên theo tính chất của phép vị tự thì đối cực của A trong (O') sẽ đi qua P. Vì thế, theo định lý La Hire, đối cực của P trong (O') sẽ đi qua A.	1,5
Cuối cùng, qua phép đối xứng trục BC, ta có ngay đối cực của P trong (O) sẽ đi qua A'. Vậy ta có được A', H' cùng nằm trên đối cực của P trong (O) nên $H'A' \perp OP$.	0,5
Bây giờ nếu $\widehat{BAC} = 45^\circ$ thì ta có $\widehat{BOC} = \widehat{BO'C} = 90^\circ$ nên dễ thấy $BOCO'$ là hình vuông. Suy ra OB, OC là các tiếp tuyến của (O') nên BC là đối cực của O trong (O'). Mà $P \in BC$ nên đối cực của P trong (O') sẽ đi qua O. Vì thế nên AO là đối cực của P trong (O') nên sẽ có $AD \perp O'P$. Hơn nữa, $OHO'D$ là hình bình hành nên $OH \parallel O'D$, kéo theo $O'D \perp AP$. Từ đó, ta có ngay O' là trực tâm tam giác ADP hay $O' \equiv H'$. Vì thế nên H', O đối xứng nhau qua BC.	1,0

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM NGÀY 2

Câu	Nội dung	Điểm
	Cho hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ xác định bởi $f(m) = \begin{cases} m+3 & \text{khi } m \not\equiv 2 \\ \frac{m}{2} & \text{khi } m \equiv 2 \end{cases}$. a) Tìm tất cả các số nguyên m sao cho $f(f(f(m))) = 1$. b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên lẻ k, có đúng ba số nguyên phân biệt m sao cho $f(f(f(m))) = k$. c) Với số nguyên chẵn k, hỏi có bao nhiêu số nguyên phân biệt m sao cho $f(f(f(m))) = k$?	5,0
	Ta có các nhận xét: - Nếu $f(m)$ lẻ thì m chẵn và $m = 2f(m)$. - Nếu $f(m)$ chẵn thì $m = 2f(m)$ hoặc $m = f(m) - 3$.	0,5
5	a) $f(f(f(m))) = 1 \Rightarrow f(f(m)) = 2f(f(f(m))) = 2 \Rightarrow f(m) = 4 \vee f(m) = -1$. • $f(m) = -1 \Rightarrow m = 2f(m) = -2$. • $f(m) = 4 \Rightarrow m = 8 \vee m = 1$. Vậy $m \in \{-2; 1; 8\}$. b) $f(f(f(m))) = k \Rightarrow f(f(m)) = 2f(f(f(m))) = 2k$ $\Rightarrow f(m) = 4k \vee f(m) = 2k - 3$. • $f(m) = 2k - 3 \Rightarrow m = 2f(m) = 4k - 6$. • $f(m) = 4k \Rightarrow m = 8k \vee m = 4k - 3$. Vậy $m \in \{4k - 6; 8k; 4k - 3\}$, rõ ràng ba số này đều phân biệt. c) $f(f(f(m))) = k \Rightarrow f(f(m)) = 2k \vee f(f(m)) = k - 3$ • $f(f(m)) = k - 3 \Rightarrow f(m) = 2f(f(m)) = 2k - 6$ $\Rightarrow m = 4k - 12 \vee m = 2k - 9$. • $f(f(m)) = 2k \Rightarrow f(m) = 4k \vee f(m) = 2k - 3$ $\Rightarrow m = 8k \vee m = 4k - 3 \vee m = 4k - 6$. Vậy có 5 số nguyên m thỏa mãn là $m \in \{4k - 6; 8k; 4k - 3; 4k - 12; 2k - 9\}$, rõ ràng các số này đều phân biệt.	0,5
	b) $f(f(f(m))) = k \Rightarrow f(f(m)) = 2f(f(f(m))) = 2k$ $\Rightarrow f(m) = 4k \vee f(m) = 2k - 3$. • $f(m) = 2k - 3 \Rightarrow m = 2f(m) = 4k - 6$. • $f(m) = 4k \Rightarrow m = 8k \vee m = 4k - 3$. Vậy $m \in \{4k - 6; 8k; 4k - 3\}$, rõ ràng ba số này đều phân biệt. c) $f(f(f(m))) = k \Rightarrow f(f(m)) = 2k \vee f(f(m)) = k - 3$ • $f(f(m)) = k - 3 \Rightarrow f(m) = 2f(f(m)) = 2k - 6$ $\Rightarrow m = 4k - 12 \vee m = 2k - 9$. • $f(f(m)) = 2k \Rightarrow f(m) = 4k \vee f(m) = 2k - 3$ $\Rightarrow m = 8k \vee m = 4k - 3 \vee m = 4k - 6$. Vậy có 5 số nguyên m thỏa mãn là $m \in \{4k - 6; 8k; 4k - 3; 4k - 12; 2k - 9\}$, rõ ràng các số này đều phân biệt.	2,0
	c) $f(f(f(m))) = k \Rightarrow f(f(m)) = 2k \vee f(f(m)) = k - 3$ • $f(f(m)) = k - 3 \Rightarrow f(m) = 2f(f(m)) = 2k - 6$ $\Rightarrow m = 4k - 12 \vee m = 2k - 9$. • $f(f(m)) = 2k \Rightarrow f(m) = 4k \vee f(m) = 2k - 3$ $\Rightarrow m = 8k \vee m = 4k - 3 \vee m = 4k - 6$. Vậy có 5 số nguyên m thỏa mãn là $m \in \{4k - 6; 8k; 4k - 3; 4k - 12; 2k - 9\}$, rõ ràng các số này đều phân biệt.	2,0
Câu	Nội dung	Điểm
6	Cho tam giác ABC không cân, có trọng tâm G và nội tiếp trong đường tròn (O), lấy điểm $A' \in (O)$ sao cho AA' song song với BC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, CA, AB. Gọi D, E, F là điểm đối xứng của chân các đường phân giác trong góc A, B, C của tam giác ABC lần lượt qua M, N, P. Giả sử EF cắt BC tại D' và gọi (ω_A) là đường tròn đường kính DD'. a) Chứng minh rằng đường thẳng OA' tiếp xúc với (ω_A) tại A'. b) Tính tỉ số phương tích từ G đến (O) và phương tích từ G đến (ω_A).	5,0

c) Chứng minh rằng trực tâm của tam giác DEF nằm trên đường thẳng OG .



0,5

a) Gọi AU là phân giác trong của tam giác ABC thì theo tính chất đường phân giác, ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{UC}{UB} = \frac{AC}{AB}$. Tương tự, ta có $\frac{EC}{EA} = \frac{AB}{BC}$ và $\frac{FA}{FB} = \frac{BC}{CA}$.

Vì thế, theo định lý Ceva thì AD, BE, CF đồng quy và kéo theo $(DD', BC) = -1$.

Gọi AV là phân giác ngoài của tam giác ABC thì $(UV, BC) = -1$. Qua phép đối xứng tâm M thì $(DV', CB) = -1$ với V' là đối xứng với V qua M . Từ đó, $D' \equiv V'$ nên (ω_A) đối xứng với đường tròn đường kính UV qua trung trực của BC . Mặt khác, (UV) đi qua A nên (ω_A) sẽ đi qua điểm A' , là đối xứng với A qua trung trực BC . Đến đây, ta có hai cách giải như sau:

0,5

Cách 1. Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng DD' thì theo hệ thức Newton, ta có $JA'^2 = JD^2 = JD'^2 = JB \cdot JC$ nên JA' tiếp xúc với (O) . Do đó, $\widehat{OA'J} = 90^\circ$ hay OA' tiếp xúc với (ω_A) tại A' .

0,5

Cách 2. Vì (UV) là đường tròn Apollonius đỉnh A nên theo tính chất quen thuộc thì OA tiếp xúc với (UV) nên qua phép đối xứng trục thì OA' tiếp xúc với (ω_A) ở A' .

b) Gọi R là giao điểm khác A' của $(O), (\omega_A)$, ta sẽ chỉ ra $R \in AM$ bằng hai cách:

Cách 1. Ta có các tia JA', JR tiếp xúc với (O) nên $A'BRC$ điều hòa, kéo theo

$\frac{RB}{RC} = \frac{A'B}{A'C} = \frac{AC}{AB}$. Giả sử AR cắt BC ở M' thì theo bổ đề cát tuyến trong tứ

giác $A'BRC$, ta có $\frac{M'B}{M'C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{RB}{RC} = 1$ nên $M'B = M'C$ hay $M' \equiv M$.

1,0

Cách 2. Giả sử đường tròn Apollonius đỉnh A cắt (O) tại K thì $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$ nên $ABKC$ điều hòa, kéo theo AK là đường đối trung của tam giác ABC . Vì thế (ω_A) cắt (O) tại A', R sẽ lần lượt là các điểm đối xứng với A, K qua trung trực BC .

	Do đó $KR \parallel BC$ nên AK, AR đẳng giác trong góc A , kéo theo AR là đường trung tuyến của tam giác ABC hay $R \in AM$.	
	Giả sử AR cắt lại (ω_A) tại S thì dễ ý rằng (UV) và (ω_A) cũng đối xứng nhau qua tâm M nên S sẽ là ảnh của A qua phép đối xứng đó, kéo theo M là trung điểm AS . Đến đây, ta có	1,0
	$\frac{\mathcal{P}_{G/(O)}}{\mathcal{P}_{G/(\omega_A)}} = \frac{\overline{GR} \cdot \overline{GA}}{\overline{GR} \cdot \overline{GS}} = \frac{\overline{GA}}{\overline{GS}} = \frac{2/3 \cdot \overline{MA}}{4/3 \cdot \overline{MS}} = -\frac{1}{2}.$	
	Ghi chú. Ta vẫn có thể tính trực tiếp phương tích từ G đến (ω_A) bằng các hướng biến đổi khác mà không cần chỉ ra $R \in AM$.	
	c) Định nghĩa tương tự với $(\omega_B), (\omega_C)$. Theo câu a), ta có $\mathcal{P}_{O/(\omega_A)} = OA'^2 = R^2$ với R là bán kính của (O) . Vì tính bình đẳng giữa các đỉnh A, B, C , ta cũng chỉ ra được $\mathcal{P}_{O/(\omega_B)} = \mathcal{P}_{O/(\omega_C)} = R^2$ nên O có cùng phương tích đến $(\omega_A), (\omega_B), (\omega_C)$.	0,5
	Theo câu b) thì $\mathcal{P}_{G/(\omega_A)} = -2\mathcal{P}_{G/(O)}$, đại lượng này là bình đẳng giữa các đỉnh A, B, C . Tương tự ta cũng tính được $\mathcal{P}_{G/(\omega_B)} = \mathcal{P}_{G/(\omega_C)} = -2\mathcal{P}_{G/(O)}$ nên G có cùng phương tích đến $(\omega_A), (\omega_B), (\omega_C)$. Vì thế nên $(\omega_A), (\omega_B), (\omega_C)$ đồng trục và chúng có chung trục đẳng phương là OG .	0,5
	Gọi H là trực tâm tam giác DEF và X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của D, E, F lên các cạnh đối diện, thì $X \in DH$ và $X \in (\omega_A)$. Khi đó $\mathcal{P}_{H/(\omega_A)} = \overline{HX} \cdot \overline{HD}$. Tương tự $\mathcal{P}_{H/(\omega_B)} = \overline{HY} \cdot \overline{HE}$, $\mathcal{P}_{H/(\omega_C)} = \overline{HZ} \cdot \overline{HF}$. Rõ ràng đại lượng này cũng bình đẳng giữa các đỉnh D, E, F trong tam giác DEF nên H có cùng phương tích đến ba đường tròn $(\omega_A), (\omega_B), (\omega_C)$. Vì thế ta có $H \in OG$.	0,5
Câu	Nội dung	Điểm
	Tìm tất cả các hàm số $f, g : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn đồng thời: (i) $f(2024x^2) \leq 2024f(g(x))$ với mọi $x > 0$; (ii) $f(x + y^2) \geq f(g(y)) + \frac{y^2 f(x)^3}{g(yf(x))}$ với mọi $x, y > 0$.	5,0
	Trước hết, ta thấy nếu như tồn tại y_0 để $g(y_0) > y_0^2$ thì đặt $x = g(y_0) - y_0^2$ hay $x + y_0^2 = g(y_0)$, thay vào điều kiện (ii) đã cho, ta có $\frac{y_0^2 f(x)^3}{g(y_0 f(x))} \leq 0$, vô lý. Do đó $g(y) \leq y^2$ với mọi $y > 0$.	0,5
	Khi đó, cũng từ (ii), ta có $f(x + y^2) \geq f(g(y)) + \frac{y^2 f(x)^3}{y^2 f(x)^2} \geq f(g(y)) + f(x), \forall x, y > 0.$ Suy ra $f(x + y^2) > f(x)$ nên f là hàm tăng ngặt.	1,0

	Ta có: $f(x + 2y^2) = f(x + y^2 + y^2)$ $\geq f(g(y)) + f(x + y^2) \geq 2f(g(y)) + f(x), \forall x, y > 0.$ Như vậy, bằng quy nạp, ta có $f(x + ny^2) \geq nf(g(y)) + f(x)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ và $x, y > 0.$ Từ đó suy ra $f(x + 2024y^2) \geq 2024f(g(y)) + f(x).$	1,0
7	Kết hợp với điều kiện (i), ta có $f(x + 2024y^2) \geq f(2024y^2) + f(x), \forall x, y > 0.$ Từ đó, ta có ngay $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$ với mọi $x, y > 0.$ Suy ra $f(2024x) \geq 2024f(x)$ và $f(nx) \geq nf(x)$ với mọi $x > 0, n \in \mathbb{Z}^+.$ Do $g(x) \leq x^2$ và f tăng ngặt nên từ (i) có $f(2024x^2) \leq 2024f(g(x)) \leq 2024f(x^2)$ hay $f(2024x) \leq 2024f(x)$ với mọi $x > 0.$ Vì thế nên đẳng thức xảy ra, tức là $f(2024x) = 2024f(x), \forall x > 0.$	1,0
	Từ đây suy ra $f(2024^m x) = 2024^m f(x), \forall x > 0$ với $m \in \mathbb{Z}^+.$ Với $n \in \mathbb{Z}^+$ tùy ý, chọn $m \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $n < 2024^m.$ Khi đó với $x > 0$ thì $2024^m f(x) = f(2024^m x) = f(nx + (2024^m - n)x)$ $\geq f(nx) + f((2024^m - n)x)$ $\geq nf(x) + (2024^m - n)f(x) = 2024^m f(x).$ Vì thế nên đẳng thức phải xảy ra, tức là $f(nx) = nf(x)$ với mọi $x > 0, n \in \mathbb{Z}^+.$ (*)	0,5
	Đặt $a = f(1),$ trong (*), cho $x = \frac{1}{n}$ thì có $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n}.$ Trong (*), cho $x = \frac{1}{m}$ với $m \in \mathbb{Z}^+$ thì $f\left(\frac{n}{m}\right) = nf\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{n}{m}a.$ Vì thế nên $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{Q}^+.$ Với $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tùy ý, xét hai dãy số hữu tỷ dương $(u_n), (v_n)$ sao cho $u_n < x_0 < v_n$ và $\lim u_n = \lim v_n = x_0$ thì theo tính tăng ngặt của $f,$ ta có $f(u_n) < f(x_0) < f(v_n) \text{ hay } au_n < f(x_0) < av_n.$ Cho $n \rightarrow +\infty$ thì có ngay $ax_0 \leq f(x_0) \leq ax_0$ nên $f(x_0) = ax_0$ và từ đó, ta được $f(x) = ax, \forall x > 0.$ Từ điều kiện (i), suy ra $a \cdot 2024x^2 \leq 2024 \cdot ag(x)$ hay $g(x) \geq x^2$ với mọi $x > 0.$ Mặt khác, ta đã chỉ ra được $g(x) \leq x^2$ với mọi $x > 0$ nên ta có ngay $g(x) = x^2$ với mọi $x > 0.$ Thử lại, ta thấy các hàm f, g nêu trên đều thoả mãn. Vậy nên $f(x) = ax$ và $g(x) = x^2$ là các hàm số cần tìm.	1,0

Câu	Nội dung	Điểm																										
	Trong buổi sinh hoạt ngoại khoá, có 100 cái ghế được xếp thành hai hàng tạo thành 50 cặp đối diện nhau. Cô giáo cho 100 em học sinh ngồi vào các ghế, mỗi ghế có đúng một học sinh. a) Giả sử mỗi học sinh chỉ quen với người ngồi bên cạnh hoặc đối diện mình, hỏi cần chọn ra ít nhất bao nhiêu em sao cho mỗi em không được chọn thì quen với ít nhất một em được chọn? b) Giả sử có một học sinh nào đó đi ra ngoài và bỏ lại một ghế trống. Cô giáo sẽ chọn một học sinh tùy ý ở hàng ghế không có ghế trống đến ngồi vào ghế đang trống. Cô giáo có thể thực hiện thao tác như thế nhiều lần. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn lần, cô giáo không thể xếp vị trí của các học sinh sao cho em nào cũng ngồi vào ghế đối diện với ghế mình ngồi ban đầu.	5,0																										
8	a) Để đơn giản, ta đánh số các ghế như mô hình sau đây: <table border="1"> <tr> <td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>...</td><td>49</td><td>50</td></tr> <tr> <td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>...</td><td>49</td><td>50</td></tr> </table> Rõ ràng mỗi em thì ngồi kề (hoặc đối diện) với không quá 3 em còn lại nên nếu gọi m là số lượng học sinh được chọn thì các em này sẽ quen được tối đa $3m$ em còn lại. Vì thế, ta cần có $100 - m \leq 3m$ hay $m \geq 25$. Tuy nhiên, nếu $m = 25$ thì dấu bằng phải xảy ra, tức là mỗi em được chọn sẽ phải quen với đúng 3 em còn lại. Khi đó, hai em ngồi ở ghế đánh số 1 sẽ không được chọn. Vì thế hai em ngồi ở ghế đánh số 2 phải cùng lúc được chọn, tuy nhiên lúc đó thì hai em này cùng quen nhau nên sẽ không thể quen được 3 em còn lại, vô lý. Do đó, $m \geq 26$. Ta có thể chọn các em ngồi ở ghế số lẻ ở hàng trên, hàng dưới xen kẽ như hình. Hàng dưới: 1, 5, 9, ..., 49 và hàng trên là 3, 7, 11, ..., 47. Cuối cùng ta chọn thêm em ngồi ở ghế 50 ở hàng trên nữa là được. Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là 26. b) Giả sử tồn tại các thao tác sao cho sau x lượt, ta có thể thực hiện theo yêu cầu của bài toán. Ta sẽ giải bài toán tổng quát khi thay $100 = 4k$. Đánh số hai hàng ban đầu cụ thể như sau, trong đó không mất tính tổng quát, coi số 0 ứng với ghế trống: <table> <tr> <td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>...</td><td>$2k - 1$</td></tr> <tr> <td>$2k$</td><td>$2k + 1$</td><td>$2k + 2$</td><td>...</td><td>$4k - 1$</td></tr> </table> Dễ thấy rằng, ở mỗi lượt thao tác thì số 0 sẽ liên tục đổi hàng nên để có thể sắp xếp vị trí như yêu cầu bài toán thì x phải là số lẻ. Ta nối hai hàng lại với nhau thành một hàng như sau $0, 1, 2, \dots, 2k - 1 \parallel 2k, 2k + 1, 2k + 2, \dots, 4k - 1$ thì trạng thái kết thúc sẽ là $2k, 2k + 1, 2k + 2, \dots, 4k - 1 \parallel 0, 1, 2, \dots, 2k - 1.$ Trong dãy số $a_1, a_2, \dots, a_{4k}$ đại diện cho các số trên, ta gọi cặp số (a_i, a_j) là nghịch thế nếu như $i < j$ và $a_i > a_j$. Khi đó, số nghịch thế của dãy ở trạng thái ban đầu và trạng thái kết thúc đều chẵn vì lần lượt là 0 và $(2k)(2k) = 4k^2$.	1	2	3	4	5	...	49	50	1	2	3	4	5	...	49	50	0	1	2	...	$2k - 1$	$2k$	$2k + 1$	$2k + 2$	...	$4k - 1$	1,0 0,5 1,5
1	2	3	4	5	...	49	50																					
1	2	3	4	5	...	49	50																					
0	1	2	...	$2k - 1$																								
$2k$	$2k + 1$	$2k + 2$	...	$4k - 1$																								

Ta sẽ chỉ ra rằng khi đổi chỗ hai số bất kỳ x, y trong dãy thì số lượng nghịch thế sẽ thay đổi lẻ đơn vị. Thật vậy, $\dots x(a_1 a_2 \dots a_i) y \dots \rightarrow \dots y(a_1 a_2 \dots a_i) x \dots$ Ta thấy khi đổi chỗ (x, y) cho nhau thì với các nghịch thế chứa những số trước x hoặc sau y sẽ không bị ảnh hưởng. Ta lại xét các nghịch thế ứng với các số nằm giữa x, y. Ta có $(x, a_i) \rightarrow (a_i, x)$ sẽ có số nghịch thế thay đổi ± 1, tương tự thì $(a_i, y) \rightarrow (y, a_i)$ sẽ có số nghịch thế thay đổi ± 1. Suy ra, ứng với mỗi số a_i sẽ có số nghịch thế thay đổi là $\pm 1 \pm 1$ nên luôn chẵn, vì thế số nghịch thế ứng với các số này sẽ thay đổi chẵn đơn vị; riêng (y, x) sẽ thay đổi thêm 1 đơn vị và do đó, tổng cộng thay đổi lẻ đơn vị.	1,0
Vì thế, sau lẻ lần thao tác, số nghịch thế là lẻ, trong khi số nghịch thế lúc đầu và lúc sau như đã nêu ở trên đều chẵn, mâu thuẫn. Do đó, không tồn tại các thao tác thoả mãn điều kiện đề bài.	0,5