

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
CAO BẰNG**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2023 - 2024**

MÔN: TOÁN

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)
(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu 1: (1,0 điểm)

Rút gọn biểu thức sau:

$$P = \left(\frac{x-108+23\sqrt{x}}{x-16} - 1 \right) : \left(\frac{75-x}{x+\sqrt{x}-12} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4} \right), (x > 0, x \neq 9, x \neq 16).$$

Câu 2: (1,0 điểm)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = -x + 6$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Tính tổng độ dài OA và OB (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |x| + y^2 = 10 \\ 2|x| - 3y^2 = -25 \end{cases}$$

b) Giải phương trình: $x + \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - 4 = 3.$

Câu 4: (2,0 điểm)

a) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $abc = 2023$. Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \frac{2023a}{ab + 2023a + 2023} + \frac{b}{bc + b + 2023} + \frac{c}{ca + c + 1}$$

b) Cho n là số tự nhiên ($n > 1$). Gọi a và b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2025nx - 2024 = 0$. Gọi c và d là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2023nx - 2024 = 0$. Chứng minh rằng $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ là một số chính phương.

Câu 5: (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Kẻ HM, HN lần lượt vuông góc với AB, AC ($M \in AB, N \in AC$).

a) Chứng minh tứ giác AMHN nội tiếp.

- b) Gọi giao điểm của đường tròn tâm A bán kính AH với cung nhỏ AC của đường tròn (O) là điểm Q . Chứng minh ba điểm M, N, Q thẳng hàng.
- c) Khi điểm A cố định và hai điểm B, C di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC luôn là tam giác nhọn. Chứng minh MN song song với một đường thẳng cố định.

Câu 6: (1,0 điểm)

Với a, b, c là ba số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2 + 8c^2 + 14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2 + 8a^2 + 14ca}} \geq \frac{a+b+c}{5}.$$

----- HẾT -----

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Câu 1	Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 9 \\ x \neq 16 \end{cases}$. Ta có $P = \left(\frac{x-108+23\sqrt{x}}{x-16} - 1 \right) : \left(\frac{75-x}{x+\sqrt{x}-12} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4} \right)$ $= \left(\frac{x-16+23\sqrt{x}-92}{x-16} - 1 \right) : \left[\frac{(75-x)(\sqrt{x}+4) + (\sqrt{x}+3)(x+\sqrt{x}-12)}{(\sqrt{x}+4)(x+\sqrt{x}-12)} \right]$ $= \frac{23(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x})^2-16} : \left[\frac{75\sqrt{x}+300-x\sqrt{x}-4x+x\sqrt{x}+x-12\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}-36}{(\sqrt{x}+4)(x+\sqrt{x}-12)} \right]$ $= \frac{23}{\sqrt{x}+4} : \left[\frac{66\sqrt{x}+264}{(\sqrt{x}+4)(x+\sqrt{x}-12)} \right] = \frac{23(x-16+\sqrt{x}+4)}{66(\sqrt{x}+4)} = \frac{23}{66}(\sqrt{x}-3)$
Câu 2	Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) là $x^2 = -x + 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$

	Tọa độ giao điểm A, B của (P) và (d) là $A(-3;9), B(2;4)$. Do đó, tổng độ dài của hai đoạn thẳng OA và OB là $T = OA + OB = \sqrt{(0+3)^2 + (0-9)^2} + \sqrt{(0-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{90} + \sqrt{20} \approx 13,96.$
Câu 3	a) Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau: $\begin{cases} 2 x + 2y^2 = 20 & (1) \\ 2 x - 3y^2 = -25 & (2) \end{cases}$ Trừ từng vế phương trình (2) và (1), ta được: $5y^2 = 45 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$ Với $y = \pm 3$, thay vào phương trình (1), ta được $x = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là $S = \{(-1;3), (1;3), (-1;-3), (1;-3)\}$
	b) $x + \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 4} = 3 \quad (3)$ Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \geq 0 \end{cases} (*)$. Đặt $x + \frac{1}{x} = t, t \geq 2 \quad (**)$. Khi đó $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, phương trình (3) có dạng: $t + \sqrt{t^2 - 6} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 6} = 3 - t \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6} \leq t \leq 3 \\ t \leq -\sqrt{6} \\ t^2 - 6 = (3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6} \leq t \leq 3 \\ t \leq -\sqrt{6} \\ t = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{5}{2}$ Với $t = \frac{5}{2}$, thay vào $(**)$, ta được $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (t/m(**))} \\ x = 2 \text{ (t/m(**))} \end{cases}$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$.
	a) Từ giả thiết $abc = 2023$, ta có $M = \frac{2023a}{ab + 2023a + 2023} + \frac{b}{bc + b + 2023} + \frac{c}{ca + c + 1}$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038 TÀI LIỆU TOÁN HỌC

	Do đó $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ hay $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ Lại có $\widehat{A}$ chung nên $\triangle AMN \sim \triangle ACB \Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ABC}$. Kẻ AO cắt đường tròn (O) tại điểm K. Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$. Do đó $\widehat{ANM} = \widehat{AKC}$ (1) Mặt khác, Q thuộc đường tròn tâm A, bán kính AH nên $AQ = AH$. $AQ^2 = AH^2 = AN \cdot AC \Rightarrow \frac{AQ}{AN} = \frac{AC}{AQ} \Rightarrow \triangle AQC \sim \triangle ANQ \Rightarrow \widehat{AQC} = \widehat{ANQ}$ Tứ giác $AQCK$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{AQC} + \widehat{AKC} = 180^\circ$. Suy ra $\widehat{ANQ} + \widehat{AKC} = 180^\circ$. (2) Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ANM} + \widehat{ANQ} = 180^\circ$ hay ba điểm M, N, Q thẳng hàng.
	c) Gọi giao điểm thứ hai của đường tròn (O) và đường tròn tâm A, bán kính AH là P. Chứng minh tương tự ý b) ta có ba điểm M, N, P thẳng hàng. Gọi Δ là tiếp tuyến với đường tròn (O) tại K. Ta có $PQ \perp AK$ (tính chất đường kính và dây cung chắn bởi giao điểm của hai đường tròn) $\Rightarrow PQ \parallel \Delta$. Vì A cố định, (O) cố định nên Δ cố định. Do đó B, C khi thay đổi trên đường tròn (O) sao cho $\triangle ABC$ luôn là tam giác nhọn thì MN luôn song song với tiếp tuyến Δ cố định của đường tròn (O).
Câu 6	Bổ đề (BĐT Cauchy – Schwarz): Cho 6 số thực a, b, c, x, y, z và $x, y, z > 0$. Khi đó: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (1), \text{ dấu "=" xảy ra khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$ Chứng minh Trước hết ta chứng minh BĐT sau: Với 4 số thực a, b, x, y và $x, y > 0$. Ta có: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (2), \text{ dấu "=" xảy ra khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$ Thật vậy, ta viết BĐT (2) dưới dạng:

$a^2y(x+y) + b^2x(x+y) \geq (a+b)^2xy \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$ (luôn đúng). Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Áp dụng BĐT (2) hai lần ta được: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Theo Bổ đề (1) ta có: $\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc} \sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}}$.

Mặt khác, theo BĐT GM – AM:

$$\sum_{cyc} \sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab} = \sum_{cyc} (\sqrt{3a+2b} \cdot \sqrt{a+4b}) \leq \sum_{cyc} \frac{(3a+2b)(a+4b)}{2} = 5(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{5}$$

$$\text{Hay } \sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} \geq \frac{a+b+c}{5} \text{ (đpcm).}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.