

Bài 1. 1) Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{a-2}+2}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{a-2}}{3+\sqrt{a-2}} + \frac{a+7}{11-a} \right) : \left(\frac{3\sqrt{a-2}+1}{a-3\sqrt{a-2}-2} - \frac{1}{\sqrt{a-2}} \right)$

2) Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m = 0$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng với mọi m , phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

b) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{16(x_1x_2 - x_1 - x_2)}{16(x_1^2 + x_2^2) + 32x_1x_2 + 9}$

Bài 2. a) Giải phương trình $2x^2 + 12 = 13\sqrt{x^3 - 2x^2 + 3}$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + 2xy - 3y^2 - 2x - 10y + 4 = 0 \end{cases}$$

Bài 3. a) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 2022$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{1}{\sqrt{a+2}} + \frac{1}{\sqrt{b+2}} + \frac{1}{\sqrt{c+2}}$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n , biết tập hợp tất cả các ước nguyên dương của n là

$$\{d_1; d_2; d_3; \dots; d_k\} \text{ thỏa mãn } \begin{cases} 1 = d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_k = n \quad (k \geq 9) \\ d_7 - 10d_5 = 1 \\ 16d_7 + d_9 = n \end{cases}$$

Bài 4. 1) Cho hình vuông ABCD có cạnh $2a$. Gọi F là trung điểm của AD , E là điểm thuộc đoạn FD . Đường thẳng BE và CF cắt nhau tại G . Tính độ dài đoạn DE theo a , biết tỉ số diện tích của tam giác EFG và diện tích hình vuông ABCD bằng $\frac{1}{84}$

2) Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Đường thẳng PO cắt đường thẳng AM tại D , đường thẳng NO cắt đường thẳng AM tại E , đường thẳng BD cắt đường thẳng CE tại F .

a) Chứng minh rằng bốn điểm B, C, O, F cùng thuộc một đường thẳng

b) Chứng minh rằng $\triangle FEO \sim \triangle NEM$

c) Chứng minh rằng $\widehat{OPF} = \widehat{ONF}$

Bài 5. Cho một bảng kẻ ô vuông kích thước 7×7 (gồm 7 hàng và 7 cột). Cho phép đặt các con rô bốt vào bảng sao cho mỗi ô vuông có không quá một con rô bốt. Hai con rô bốt trong bảng được gọi là phát hiện ra nhau nếu chúng cùng nằm trên một hàng hoặc cùng trên một cột.

a) Đặt 10 con rô bốt vào 4 hàng tùy ý trong 7 hàng sao cho: Một hàng có 1 con rô bốt, một hàng có 2 con rô bốt, một hàng có 3 con rô bốt và một hàng có 4 con rô bốt. Chứng minh rằng luôn chọn được 4 con rô bốt (trong 10 con đã đặt vào bảng) đôi một không phát hiện ra nhau.

b) Chứng minh rằng khi đặt 22 con rô bốt vào bảng thì luôn chọn được 4 con rô bốt đôi một không phát hiện ra nhau.