

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 24/3/2023

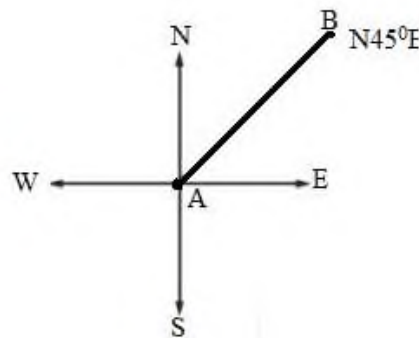
(Đề thi có 02 trang, gồm 9 câu)

Câu 1. (4 điểm)

Giải phương trình  $x^2 - 4x = \sqrt{2x^2 - 8x + 12} - 6$  trên tập số thực.

Câu 2. (2 điểm)

Trên biển Kiên Giang, tàu đánh cá B đang đánh bắt cá ở vị trí cách tàu A 60km về hướng  $N45^\circ E$  (Xem minh họa). Sau đó, tàu B chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn 30km/h về hướng đông và tàu A chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn 50km/h để gặp tàu B. Hỏi người lái tàu A phải di chuyển tàu theo hướng nào để gặp tàu B một cách nhanh nhất và mất thời gian bao lâu?



Câu 3. (3 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh  $B(-3;2)$ , đường phân giác trong của góc A có phương trình  $(d): x - y - 1 = 0$ ,  $G(2;2)$  là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, C.

Câu 4. (4 điểm)

Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2023nu_n + 2022}{2023n + 2023}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
 Tính giới hạn  $\lim u_n$ .

Câu 5. (2 điểm)

Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau và có dạng  $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn, đồng thời thỏa mãn  $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$ .

**Câu 6. (2 điểm)**

Cho 3 số dương  $x, y, z$  thỏa  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y}$ .

**Câu 7. (2 điểm)**

Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Các đường cao  $BE$ ,  $CF$  cắt nhau tại  $H$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEF$ , cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $K$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AH$ .

a. Chứng minh  $OI \perp AK$ .

b. Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ ;  $N$  là giao điểm của  $AK$  và  $BC$ .  $P$  là giao điểm thứ hai của  $AM$  và đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEF$ . Chứng minh  $AK \cdot AN = AP \cdot AM$ .

**Câu 8. (1 điểm)**

Cho  $n$  là số nguyên thỏa  $0 < n < 2023$  và  $(n, 2023) = 1$ . Chứng minh rằng  $\frac{(n+2022)!}{n!2023!}$  là một số nguyên.

**Câu 9. (1 điểm)**

Trên một mặt phẳng cho 2023 điểm bất kì, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng từ các điểm đã cho, ta luôn chọn được ba điểm là các đỉnh của một tam giác có một góc mà số đo góc đó bé hơn  $0,1^\circ$ .

-----HẾT-----

**Ghi chú:**

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM  
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

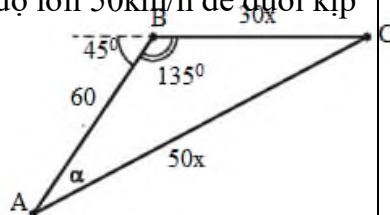
Môn: TOÁN  
Thời gian: **180** phút (không kể thời gian giao đề)  
Ngày thi: 24/3/2023  
(Hướng dẫn chấm có 5 trang)

**A. HƯỚNG DẪN CHẤM**

- Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
- Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm lệch hướng dẫn chấm.
- Sau khi cộng điểm toàn phải thi vẫn giữ nguyên số điểm, không được làm tròn.

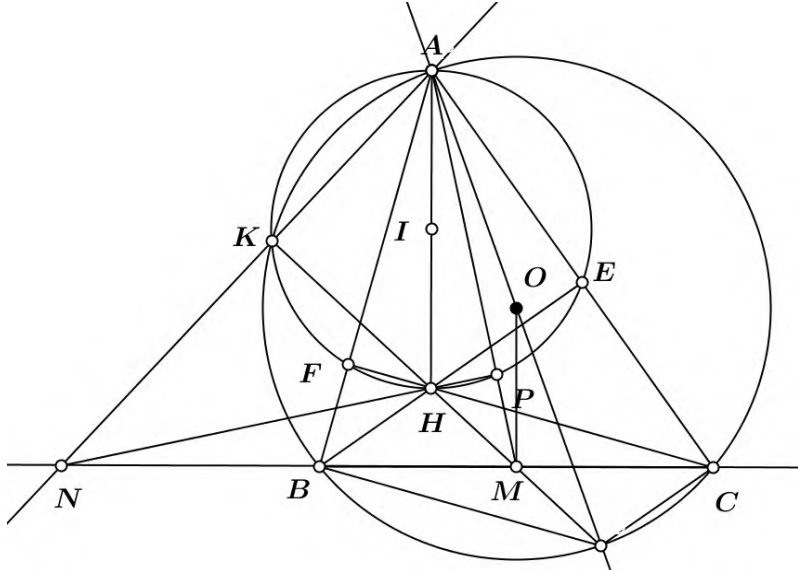
**B. ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM**

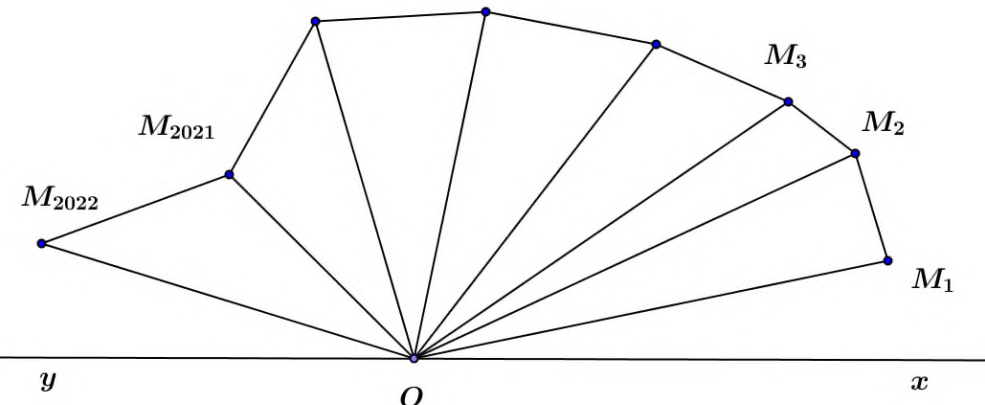
| Câu                   | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Biểu điểm  |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1.</b><br>(4 điểm) | Giải phương trình $x^2 - 4x = \sqrt{2x^2 - 8x + 12} - 6$ trên tập số thực                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |            |
|                       | Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 8x + 12} \geq 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>0.5</b> |
|                       | ta được $t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0(nh) \\ t = 2(nh) \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>1</b>   |
|                       | Với $t = 0 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 8x + 12} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 12 = 0$ vô nghiệm                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <b>1</b>   |
|                       | Với $t = 2 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 8x + 12} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <b>1</b>   |
|                       | Vậy $x = 2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <b>0.5</b> |
| <b>2.</b><br>(2 điểm) | Trên biển Kiên Giang, tàu đánh cá B đang đánh bắt cá ở vị trí cách tàu A $60km$ về hướng $N45^\circ E$ (Xem minh họa). Sau đó, tàu B chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn $30km/h$ về hướng đông và tàu A chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn $50km/h$ để gặp tàu B. Hỏi người lái tàu A phải di chuyển tàu theo hướng nào để tiếp cận tàu B một cách nhanh nhất và sau thời gian bao lâu? |            |
|                       | Gọi thời gian tàu A gặp tàu B ở vị trí C là $x$ (h) ( $x > 0$ ).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |            |
|                       | Vì tàu B chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn $30km/h$ đến C nên quãng đường BC là $30x$ (km).                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>0.5</b> |
|                       | Vì tàu A chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn $50km/h$ để đuổi kịp tàu B nên quãng đường AC là $50x$ (km).<br><br>Đặt góc $BAC = \alpha$<br>Do tàu B ở vị trí cách tàu A về hướng                                                                                                                                                                                                                  | <b>0.5</b> |



| Câu            | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Biểu điểm |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
|                | N45°E và tàu B chạy về hướng đông nên<br>tàu A chạy từ A theo hướng N(45 + α)°E.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |           |
|                | Theo định lí sin trong tam giác ABC, ta có: $\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin 135^\circ}$<br>Khi đó, $50x \cdot \sin \alpha = 30x \cdot \sin 135^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \frac{30 \cdot \sin 135^\circ}{50} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$<br>tàu A chuyển động theo hướng AC: N(45 + α)°E để gặp tàu B.                                                                                    | 0.5       |
|                | Xét tam giác ABC, ta có: Góc $ACB = 180^\circ - (\alpha + 135^\circ) = 45 - \alpha = \beta$<br>Theo định lí sin, ta có $\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow 30x = \frac{60 \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$<br>$\Rightarrow x = \frac{60 \cdot \sin \alpha}{30 \cdot \sin \beta} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin \beta}$ | 0.5       |
| 3.<br>(3 điểm) | Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho tam giác $ABC$ có đỉnh $B(-3;2)$ , đường phân giác trong của góc $A$ có phương trình $(d): x - y - 1 = 0$ .<br>$G(2;2)$ là trọng tâm tam giác $ABC$ . Tìm tọa độ $A, C$ .                                                                                                                                                                                   |           |
|                | Gọi $M$ là trung điểm $AC$ thì $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BG} \Leftrightarrow M\left(\frac{9}{2}; 2\right)$ .                                                                                                                                                                                                                                                               | 0.5       |
|                | Gọi $B'$ là điểm đối xứng của $B$ qua phân giác trong $d: x - y - 1 = 0$ của góc $A$ . Ta có $BB': x + y + 1 = 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.5       |
|                | Gọi $I$ là trung điểm của đoạn $BB'$ . Suy ra $I(0; -1) \Rightarrow B'(3; -4) \in AC$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0.5       |
|                | Phương trình đường thẳng $AC$ đi qua $B'$ và $M: AC: 4x - y - 16 = 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0.5       |
|                | Tọa độ $A$ thỏa hệ $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 4x - y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(5; 4)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0.5       |
|                | Suy ra $C(4; 0)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0.5       |
| 4.<br>(3 điểm) | Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2023nu_n + 2022}{2023n + 2023}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$<br>Tính giới hạn $\lim u_n$ .                                                                                                                                                                                                                    |           |
|                | $u_{n+1} = \frac{2023nu_n + 2022}{2023n + 2023}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 2023(n+1)u_{n+1} = 2023uu_n + 2022$<br>Đặt $v_n = 2023nu_n, n \in \mathbb{N}^*$ .                                                                                                                                                                                                                       | 1         |
|                | Ta có $v_{n+1} = v_n + 2022, n \in \mathbb{N}^*$ , suy ra $v_n = 2022n + 1, n \in \mathbb{N}^*$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1         |

| Câu            | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Biểu điểm |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
|                | Suy ra $u_n = \frac{2022n+1}{2023n}, n \in \mathbb{N}^*$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0.5       |
|                | Suy ra $\lim u_n = \frac{2022}{2023}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0.5       |
| 5.<br>(2 điểm) | Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau và có dạng $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ tập $S$ . Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn, đồng thời thỏa mãn $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$ .                                                                                                                                                                                                                              |           |
|                | Gọi $A$ là biến cố “chọn được số tự nhiên chẵn từ tập $T$ thỏa mãn $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$ ”. Khi đó $n(\Omega) = 9 \cdot A_9^5$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0.5       |
|                | TH1: $a_6 = 0$ thì $a_1 \dots a_5$ có $C_9^5$ cách chọn                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0.5       |
|                | TH2: $a_6 = 2$ thì $a_1 \dots a_5$ có $C_7^5$ cách chọn                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |           |
|                | TH3: $a_6 = 4$ thì $a_1 \dots a_5$ có $C_5^5$ cách chọn<br>$n(A) = C_9^5 + C_7^5 + C_5^5 = 148$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0.5       |
|                | Xác suất cần tìm $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{148}{9 \cdot A_9^5} = \frac{37}{34020}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0.5       |
| 6.<br>(2 điểm) | Cho 3 số dương $x, y, z$ thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |           |
|                | Ta có : $P^2 = \left( \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \right)^2 = \left( \frac{xy}{z} \right)^2 + \left( \frac{yz}{x} \right)^2 + \left( \frac{xz}{y} \right)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2)$                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0.5       |
|                | Áp dụng BĐT Cauchy ta có<br>$\left( \frac{xy}{z} \right)^2 + \left( \frac{yz}{x} \right)^2 \geq 2 \sqrt{\left( \frac{xy}{z} \right)^2 \cdot \left( \frac{yz}{x} \right)^2} = 2y^2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0.5       |
|                | Tương tự $\left( \frac{xz}{y} \right)^2 + \left( \frac{yz}{x} \right)^2 \geq 2z^2$ ,<br>$\left( \frac{xz}{y} \right)^2 + \left( \frac{xy}{z} \right)^2 \geq 2x^2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.5       |
|                | Cộng 3 BĐT ta có $P^2 \geq 9 \Rightarrow P \geq 3 \Rightarrow \min(P) = 3$<br>Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.5       |
| 7.<br>(2 điểm) | Cho tam giác nhọn $ABC$ ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn $(O)$ . Các đường cao $BE$ , $CF$ cắt nhau tại $H$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác $AEF$ , cắt đường tròn $(O)$ tại điểm thứ hai là $K$ . Gọi $I$ là trung điểm $AH$ .<br><b>a.</b> Chứng minh $OI \perp AK$ .<br><b>b.</b> Gọi $M$ là trung điểm cạnh $BC$ ; $N$ là giao điểm của $AK$ và $BC$ . $P$ là giao điểm thứ hai của $AM$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác $AEF$ . Chứng minh $AK \cdot AN = AP \cdot AM$ . |           |

| Câu                           | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Biểu điểm |
|-------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
|                               |                                                                                                                                                                                                                          | 0.25      |
|                               | <p>Chứng minh tứ giác <math>AEHF</math> nội tiếp đường tròn đường kính <math>AH</math>, suy ra <math>I</math> là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác <math>AEHF</math></p>                                                                                                                                   | 0.5       |
|                               | <p>Suy ra <math>OI \perp AK</math> (1)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.25      |
|                               | <p><b>b.</b> Gọi <math>M</math> là trung điểm cạnh <math>BC</math>; <math>N</math> là giao điểm của <math>AK</math> và <math>BC</math>. <math>P</math> là giao điểm thứ hai của <math>AM</math> và đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>AEF</math>. Chứng minh <math>AK \cdot AN = AP \cdot AM</math>.</p> |           |
|                               | <p>Chứng minh <math>AH \parallel OM</math> và <math>AH = 2OM</math>. Suy ra <math>OI \parallel HM</math> (2)<br/> Từ (1) và (2) suy ra <math>HM \perp AK</math> (3). Mặt khác <math>HK \perp AK</math> (4).<br/> Từ (3) và (4) suy ra <math>M, H, K</math> thẳng hàng</p>                                  | 0.5       |
|                               | <p>Chứng minh <math>N, H, P</math> thẳng hàng vì cùng vuông góc với <math>AM</math></p>                                                                                                                                                                                                                    | 0.25      |
|                               | <p>Chứng minh <math>\triangle ANP \sim \triangle AMK</math>, suy ra <math>AK \cdot AN = AP \cdot AM</math></p>                                                                                                                                                                                             | 0.25      |
| <p><b>8.</b><br/>(1 điểm)</p> | <p>Cho <math>n</math> là số nguyên thỏa <math>0 &lt; n &lt; 2023</math> và <math>(n, 2023) = 1</math>. Chứng minh rằng <math>\frac{(n+2022)!}{n!2023!}</math> là một số nguyên.</p>                                                                                                                        |           |
|                               | $\frac{(n+2022)!}{n!2023!} = \frac{1}{2023} C_{n+2022}^{2022} = \frac{1}{n+2023} C_{n+2023}^{2023}$                                                                                                                                                                                                        | 0.5       |
|                               | $\Rightarrow (n+2023) C_{n+2022}^{2022} = 2023 C_{n+2023}^{2023} \quad (1)$                                                                                                                                                                                                                                |           |
|                               | <p>Vì <math>0 &lt; n &lt; 2023</math> và <math>(n, 2023) = 1 \Rightarrow (n+2023, 2023) = 1</math> (2)<br/> <math>C_{n+2022}^{2022}, C_{n+2023}^{2023} \in \mathbb{Z}</math> (3)</p>                                                                                                                       |           |
|                               | <p>Từ (1) (2) và (3) suy ra <math>C_{n+2022}^{2022}</math> chia hết cho 2023<br/> Suy ra <math>\frac{(n+2022)!}{n!2023!}</math> là một số nguyên</p>                                                                                                                                                       | 0.5       |

| Câu            | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Biểu điểm |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 9.<br>(1 điểm) | <p>Cho 2023 điểm bất kì nằm trên một mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng từ các điểm đã cho, bao giờ ta cũng có thể chọn được ba điểm là các đỉnh của một tam giác có một góc mà số đo góc đó bé hơn <math>0,1^0</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |           |
|                |  <p>Vì 2023 điểm là hữu hạn nên tồn tại nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng <math>xy</math> đi qua điểm <math>O</math> là một trong các điểm đã cho và chứa 2022 điểm còn lại. Vì trong các điểm đã cho không có 3 điểm nào thẳng hàng nên bao giờ ta cũng có thể lập được 2021 tam giác có chung đỉnh <math>O</math> và hai đỉnh còn lại được lấy liên tiếp trong 2022 điểm sao cho hai tam giác kề nhau có chung một cạnh và không có hai tam giác nào chồng lên nhau.</p> | 0.5       |
|                | <p>Ta có các góc <math>xOM_1 + M_1OM_2 + \dots + M_{2022}Oy = 180^0</math></p> <p>Suy ra <math>180^0 \geq 2021 \min \{ M_1OM_2, \dots, M_{2021}OM_{2022} \}</math></p> <p>Hay <math>\min \{ M_1OM_2, \dots, M_{2021}OM_{2022} \} \leq \frac{180^0}{2021} &lt; 0,1^0</math></p> <p>Suy ra tồn tại một tam giác có một góc bé hơn <math>0,1^0</math></p>                                                                                                                                                                                                        | 0.5       |

**Ghi chú:** Thí sinh có thể có cách giải khác - Giám khảo thống nhất và cho điểm tương ứng

-----HẾT-----