

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI CHỌN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
PHAN BỘI CHÂU NĂM HỌC 2024-2025

Môn: **TOÁN HỌC**

Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)

Ngày thi thứ nhất: **11/09/2024**

(Đề thi gồm 01 trang, gồm 04 bài)

Câu 1. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = \frac{2024}{2025}$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1 - x_n + x_n^2}$ với mọi $n \geq 0$.

Xét dãy (y_n) xác định bởi $y_0 = 2024$, $y_{n+1} = y_n + \frac{x_n}{y_n}$ với mọi $n \geq 0$. Chứng minh rằng (y_n) có giới hạn hữu hạn và $2024\frac{2024}{2025} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \leq 2025$.

Câu 2. Cho dãy F_n là dãy Fibonacci: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ với mọi $n \geq 0$. Với mọi $n > 4$, gọi R_n là số dư khi chia $\prod_{k=1}^{F_n-1} k^k$ cho F_n . Chứng minh rằng R_n là số Fibonacci.

Câu 3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , M là trung điểm BC . Một điểm X nằm trên (O) được gọi là *cân bằng* nếu đường thẳng qua X vuông góc với MX cắt AB, AC tại hai điểm cách đều M . Giả sử D, E, F là ba điểm *cân bằng* đôi một phân biệt. Chứng minh rằng M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .

Câu 4. Tìm tất cả các hàm số liên tục, đơn điệu $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn:

$$f(xf(y)) + f(yf(x)) = 1 + f(x + y).$$

—————**Hết**—————

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN NGÀY 1

Câu 1. Xét dãy (z_n) thỏa mãn $z_n = \frac{1}{x_n}$ với mọi $n \geq 0$. Khi đó

$$z_0 = \frac{2025}{2024} > 1, \quad z_{n+1} = z_n^2 - z_n + 1.$$

Ta có: $z_{n+1} - z_n = (z_n - 1)^2 \geq 0$ với mọi $n \geq 0$. Do đó (z_n) là dãy không giảm, mà $z_0 > 1$ nên $z_n > 1 \forall n$.

Giả sử (z_n) bị chặn trên, khi đó tồn tại $\lim z_n = L > 1$ thỏa mãn: $L = L^2 - L + 1 \Rightarrow L = 1$, vô lý.

Vậy (z_n) không bị chặn trên hay $\lim z_n = +\infty \Rightarrow \lim x_n = 0$.

Dễ thấy $x_n = \frac{1}{z_n - 1} - \frac{1}{z_{n+1} - 1}$ với mọi $n \geq 0$ nên $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2024 - \frac{1}{z_{n+1} - 1} < 2024 \forall n \geq 0$.

Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 2024$.

Dễ thấy (y_n) là dãy tăng và

$$y_{n+1} = y_n + \frac{x_n}{y_n} = \dots = y_1 + \frac{x_n}{y_n} + \dots + \frac{x_1}{y_1} < 2024 + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{2024} < 2025 \forall n \geq 0.$$

Vậy (y_n) là dãy tăng bị chặn trên nên nó có giới hạn hữu hạn.

Đặt $M = \lim y_n$ thì $M \leq 2025$.

Ta có:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{x_n}{y_n} = \dots = y_1 + \frac{x_n}{y_n} + \dots + \frac{x_1}{y_1} > 2024 + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{2025} = 2024 + \frac{2024 - \frac{1}{z_{n+1} - 1}}{2025} \forall n \geq 0.$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ ta được $M \geq 2024 \frac{2024}{2025}$.

Câu 2. Dễ thấy, $F_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}, \forall n \geq 0$ trong đó $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Từ đây ta có $F_n^2 + (-1)^n = F_{n+1}F_{n-1}$ với mọi $n \geq 1$. Từ đây ta suy ra được nếu $n \mid m$ thì $F_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} \mid \frac{a^m - b^m}{\sqrt{5}} = F_m$.

Xét $m > 4$, m là hợp số. Khi đó m có ước $2 < n < m$. Khi đó $F_n \mid F_m$ mà $F_m > F_n > 1$ nên F_m là hợp số. Do vậy $F_{6k+4}, F_{6k}, F_{6k+2}, F_{6k+3}$ là hợp số với mọi $k \in \mathbb{N}^*$.

Xét số dư của F_n khi chia cho 4, ta thấy $F_n \equiv 1 \pmod{4}$ với mọi n có dạng $6k+1, 6k+5$.

Vậy nếu F_n là số nguyên tố thì $F_n \equiv 1 \pmod{4}$ và n là số nguyên tố lẻ.

Đến đây ta xét hai trường hợp.

TH1. F_n là hợp số. Viết $F_n = ab$ với $a, b \in \mathbb{N}, 1 < a < b < F_n$. Khi đó,

$$F_n = ab \mid a^a b^b \mid \prod_{k=1}^{F_n-1} k^k.$$

Do vậy $R_n = 0 = F_0$.

TH2. F_n là số nguyên tố. Đặt $F_n = p$ thì $p \equiv 1 \pmod{4}$ và n là số nguyên tố lẻ.

Đặt $A = \prod_{k=1}^{F_n-1} k^k = \prod_{k=1}^{p-1} k^k$. Ta có:

$$A^2 = \prod_{k=1}^{p-1} k^k (p-k)^{p-k} \equiv \prod_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-k} k \equiv (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

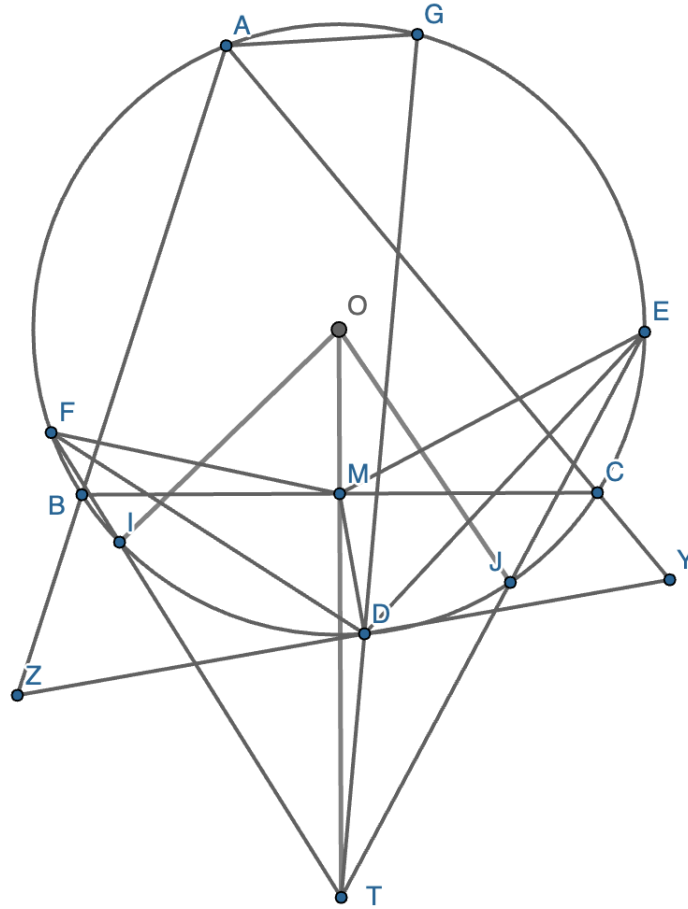
Suy ra $A^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Mà $F_{n-1}^2 + 1 = F_n F_{n-2} = p F_{n-2} \equiv 0 \pmod{p}$ và $F_{n-2}^2 + 1 \equiv F_{n-1}^2 + 1 \pmod{p}$ nên $A \equiv F_{n-1}$ hoặc $A \equiv F_{n-2} \pmod{p}$.

Suy ra $R_n \in \{F_{n-1}, F_{n-2}\}$.

Vậy $R_n \in \{F_0, F_{n-1}, F_{n-2}\}$ với mọi $n > 4$.

Câu 3. Hình vẽ:



Gọi T là giao điểm tiếp tuyến tại B, C của (O) . TD, TE, TF lần lượt cắt lại (O) tại G, J, I .

Gọi giao điểm của đường thẳng qua D vuông góc với MD với AB, AC là Z, Y .

Ta có: $DY = DZ$, mà $A(GDBC) = -1$ nên $AG \parallel YZ \Rightarrow AG \perp MD$.

Chứng minh tương tự, ta có $ME \perp AJ, MF \perp AI$.

Dễ thấy $\overline{TI} \cdot \overline{TF} = \overline{TM} \cdot \overline{TO} = \overline{TJ} \cdot \overline{TE} = TB^2$ nên O, M, F, I đồng viên, O, M, E, J đồng viên.

Biến đổi góc:

$$\begin{aligned}
2(MF, ME) &= 2(AI, AJ) = (OI, OJ) = (OI, OM) + (OM, OJ) \\
&= (FI, FM) + (EM, EJ) \\
&= (FI, FD) + (FD, FM) + (EM, ED) + (ED, EJ) \\
&= (FD, FM) + (EM, ED) + (AI, AJ) \\
&= (FD, MD) + (MD, MF) + (EM, MD) + (MD, DE) + (MF, ME) \\
&= (FD, MD) + (MD, ED) + (ME, MF) + (MF, ME) \\
&= (DF, DE) \pmod{\pi}
\end{aligned}$$

Chúng minh tương tự, ta có $2(MF, MD) = (EF, ED) \pmod{\pi}$; $2(MD, ME) = (FD, FE) \pmod{\pi}$.

Vậy M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .

Câu 4. Giả sử hàm số f hàm số liên tục, đơn điệu, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn:

$$f(xf(y)) + f(yf(x)) = 1 + f(x + y). \quad (1)$$

Gọi $P(x, y)$ là phép thế (x, y) vào (1). Đầu tiên, ta chứng minh $f(x) < 1$ với mọi x .

Giả sử tồn tại y sao cho $f(y) \geq 1$.

Nếu $f(y) > 1$, $P\left(\frac{y}{f(y)-1}, y\right)$, ta được $f\left(yf\left(\frac{y}{f(y)-1}\right)\right) = 1$.

Nói cách khác, tồn tại a sao cho $f(a) = 1$.

$P(a, a) \Rightarrow f(2a) = 1 = f(a)$, vô lý do f đơn điệu.

Vậy $0 < f(x) < 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Tiếp theo, ta chứng minh f đơn điệu giảm.

Giả sử f là hàm đơn điệu tăng. Xét $0 < x < a$, $P(x, a-x)$, ta được:

$$1 + f(x) = f(xf(a-x)) + f((a-x)f(x)) < 1 + f(xf(a-x))$$

$\Rightarrow f(x) < f(xf(a-x)) \Rightarrow x < xf(a-x) \Rightarrow f(a-x) > 1$, vô lý.

Vậy f là hàm đơn điệu giảm nên tồn tại $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Nếu $L > 0$, trong (1), cố định x , cho $y \rightarrow +\infty$, ta được:

$$f(xL) + L = 1 + L.$$

Suy ra $f(xL) = 1$, vô lý. Vậy $L = 0$.

$P(x, x)$, ta được: $f(xf(x)) = \frac{1+f(x)}{2}$. Từ đây suy ra $xf(x)$ là hàm đơn điệu tăng liên tục và

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(xf(x)) = \frac{1}{2} \neq 0$ nên tồn tại $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$ với $f(b) = \frac{1}{2}$.

$P(x, xy)$, ta được:

$$f(xf(xy)) + f(yf(x)) = 1 + f(x + xy).$$

Cố định y , cho $x \rightarrow +\infty$, ta được: $f\left(\frac{b}{y}\right) + f(by) = 1$ với mọi $y > 0$.

Xét hàm $g(x) = f(bx)$, dễ thấy $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ và

$$g(xg(y)) + g(yg(x)) = 1 + g(x + y) \forall x, y > 0 \quad (2)$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh $g(x) = \frac{1}{x+1}$ với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$.

Thật vậy, dễ thấy $g(1) = \frac{1}{2}$.

Giả sử $g\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b}{a+b}$ với mọi $a, b \in \mathbb{N}^*, a+b \leq n$.

Xét $a+b = n+1, b < n$, ta có $g\left(\frac{b}{a}\right) = 1 - g\left(\frac{a}{b}\right)$.

Thay $x = a-1, y = b$ vào (2), ta được $g\left(\frac{a-1}{b+1}\right) + g\left(\frac{b}{a}\right) = 1 + g(n) \Rightarrow g\left(\frac{a-1}{b+1}\right) = g(n) + g\left(\frac{a}{b}\right)$.

Từ đây ta dễ dàng suy ra được $g\left(\frac{a}{b}\right) = bg(n)$ với mọi $1 \leq b \leq n$.

Thay $b = n, a = 1$, ta được $1 - g(n) = g\left(\frac{1}{n}\right) = nfg(n) \Rightarrow g(n) = \frac{1}{n+1}$. Do đó $g\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b}{a+b}$

với mọi $a+b = n+1, 1 \leq a, b \leq n$.

Vậy $g(x) = \frac{1}{1+x}$ với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$. Do g là hàm liên tục và $\mathbb{Q}^+$ là tập trù mật trong $\mathbb{R}^+$ nên

$g(x) = \frac{1}{1+x}$ với mọi $x > 0$.

Suy ra $f(x) = \frac{1}{1+cx}$ với mọi $x > 0$, trong đó $c = \frac{1}{b}$.

Thử lại, ta có tất cả hàm thoả mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = \frac{1}{1+cx} \forall x > 0$.