

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

Câu 1. (5 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 1966 \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \right) - 2021 \left(\frac{b^{55} + c^{55}}{a^{55}} + \frac{c^{55} + a^{55}}{b^{55}} + \frac{a^{55} + b^{55}}{c^{55}} \right)$$

Câu 2. (5 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2022$ và

$$u_{n+1} = u_n (\sqrt[3]{u_n} + 1)^3 \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Xét dãy số (v_n) thỏa mãn

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{u_k} + 1}$$

với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$. Tìm $\lim v_n$.

Câu 3. (5 điểm) Cho tam giác không cân ABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H và đường tròn ngoại tiếp (O) (O là tâm). Gọi G là giao điểm khác A của AO và đường tròn đường kính AH . Các đường thẳng GE, GF tương ứng cắt HC, HB tại P, Q . Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH .

(a) Chứng minh rằng M, P, Q thẳng hàng.

(b) Gọi T là hình chiếu vuông góc của H trên AM . Gọi N, K theo thứ tự là giao điểm của ET, EF và AB, AM . Chứng minh rằng MN vuông góc với IK .

Câu 4. (5 điểm) Trên bàn có n viên bi ($n \geq 2$). Hai người A và B lần lượt lấy bi trên bàn theo quy tắc sau: Lúc đầu, A lấy ít nhất một bi và tối đa $n - 1$ bi, từ bước tiếp theo, người nào đến lượt của mình thì phải lấy ít nhất một bi và không vượt quá số bi của đối thủ đã lấy ở ngay bước trước. Người lấy được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Chứng minh rằng B có chiến lược thắng cuộc khi và chỉ khi n là một lũy thừa của 2 với số mũ nguyên dương.

.....**HẾT**.....

Học sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

Câu 5. (5 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thoả mãn

$$f(f(n) + m) = 4n + f(m + 1) \quad \text{với mọi } m, n \text{ nguyên dương.}$$

Câu 6. (5 điểm) Cho dãy số nguyên (x_n) thoả mãn $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ và $x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

(a) Chứng minh rằng $5x_n^2 + 4$ là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}$.

(b) Cho số nguyên dương A và số nguyên B thoả mãn $5A^2x_n^2 + B$ là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng $B = 4A^2$.

Câu 7. (5 điểm) Một nước có 115 thành phố. Người ta thiết lập một số đường bay trực tiếp (hai chiều) giữa một số cặp thành phố sao cho xuất phát từ một thành phố bất kỳ, hành khách có thể bay trực tiếp tới một thành phố bất kì khác trong nước hoặc qua một vài chuyến bay trung chuyển được định nghĩa như trên, đồng thời mỗi thành phố có ít nhất 5 đường bay trực tiếp tới 5 thành phố khác trong nước.

(a) Với hai thành phố bất kì, ta xét tuyến đường bay nối hai thành phố này mà cần chuyển qua ít sân bay trung gian nhất, giả sử trong tuyến này gồm có k chuyến bay trung chuyển thì ta nói độ dài đường bay nối hai thành phố là k . Chứng minh rằng độ dài đường bay nối hai thành phố bất kì không vượt quá 55.

(b) Hãy chỉ ra một cách thiết lập đường bay thoả mãn yêu cầu đã cho và có ít nhất một cặp hai thành phố có độ dài đường bay nối chúng bằng 55.

Câu 8. (5 điểm) Câu 8. Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) có AD, BE, CF là các đường cao. Lấy các điểm M, N lần lượt đối xứng với C, B qua E, F và P, Q lần lượt đối xứng với C, A qua D, F . Gọi K, T tương ứng là giao điểm của MN, PQ và FE, FD . a) Chứng minh rằng $DKPET$. b) Gọi G là giao điểm của MN và PQ (G khác K, T). Chứng minh rằng AK, BT và đường tròn ngoại tiếp tam giác GTK cùng đi qua một điểm trên đường tròn (O) .

A. Hướng dẫn giải ngày thi thứ nhất

1 (5 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 1966 \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \right) - 2021 \left(\frac{b^{55} + c^{55}}{a^{55}} + \frac{c^{55} + a^{55}}{b^{55}} + \frac{a^{55} + b^{55}}{c^{55}} \right)$$

Bài giải. Đặt $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$ và $z = \frac{c}{a}$ thì x, y, z là các số dương và thỏa mãn $xyz = 1$. Khi đó

$$P = 1966 \left(x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 2021 \left(x^{55} + y^{55} + z^{55} + \frac{1}{x^{55}} + \frac{1}{y^{55}} + \frac{1}{z^{55}} \right).$$

Bổ đề 1. Với mọi số dương x ta có

$$1966 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 2021 \left(x^{55} + \frac{1}{x^{55}} \right) \leq -110.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$1966 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 - 2021 \left((\sqrt{x})^{55} - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{55} \right)^2 \leq 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x}$ thì $t > 0$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$t^2 \left(\frac{1966}{2021} - \left(t^{54} + t^{53} + \dots + 1 + \frac{1}{t} + \dots + \frac{1}{t^{54}} \right)^2 \right) \leq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì theo AM-GM

$$t^{54} + t^{53} + \dots + 1 + \frac{1}{t} + \dots + \frac{1}{t^{54}} \geq 1 + 2 + \dots + 2 = 109 > 1.$$

□

Quay lại bài toán, ta có

$$P \leq -110 \times 3 = -330.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = c$.

2 (5 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2022$ và

$$u_{n+1} = u_n (\sqrt[3]{u_n} + 1)^3 \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Xét dãy số (v_n) thỏa mãn

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{u_k} + 1}$$

với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$. Tìm lim v_n .

Bài giải. Để cho tiện, ta đặt $x_n = \sqrt[3]{v_n}$ thì $x_1 = \sqrt[3]{2022}$ và

$$x_{n+1} = x_n(x_n + 1) \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Ta có

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n + 1}$$

hay

$$\frac{1}{1 + x_n} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Thành thử, với mỗi $n \geq 1$, ta có

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + x_k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \right) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Bổ đề 2. (x_n) là dãy tăng chặt và không bị chặn.

Chứng minh. Thực vậy, ta có

$$x_{n+1} = x_n(x_n + 1) > x_n^2 \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Với mỗi số nguyên $n > 1$, áp dụng điều trên liên tiếp $n - 1$ lần, ta được

$$x_n > x_{n-1}^2 > \cdots > x_1^{2^{n-1}}.$$

Vậy $x_n > x_1^{2^{n-1}}$ với mọi $n > 1$, do đó đúng với mọi $n \geq 1$. Vì $x_1 = \sqrt[3]{2022} > 14$ nên $\lim x_1^{2^{n-1}} = \infty$.
Do đó $\lim x_n = \infty$. $\square$

Quay lại bài toán, ta có $\lim x_{n+1} = \infty$, do đó

$$\lim v_n = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2022}}.$$

3 (5 điểm)

4 (5 điểm) Trên bàn có n viên bi ($n \geq 2$). Hai người A và B lần lượt lấy bi trên bàn theo quy tắc sau: Lúc đầu, A lấy ít nhất một bi và tối đa $n - 1$ bi, từ bước tiếp theo, người nào đến lượt của mình thì phải lấy ít nhất một bi và không vượt quá số bi của đối thủ đã lấy ở ngay bước trước. Người lấy được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Chứng minh rằng B có chiến lược thắng cuộc khi và chỉ khi n là một lũy thừa của 2 với số mũ nguyên dương.

Bài giải. Giả sử $n = 2^k$ với $k \geq 2$. Ở bước đầu tiên, giả sử A lấy x viên, trong đó $1 \leq x \leq n - 1$. Nếu $k = 2$ thì A chỉ được bốc đúng 1 viên thôi và sau đó B , A tuần tự bốc 1 viên, B là người bốc viên cuối cùng. Vậy B thắng. Nếu $k \geq 3$ thì B lấy $2^{k-1} - x$ viên, số bi còn lại trên bàn là 2^{k-1} , là lũy thừa của 2 với số mũ không nhỏ hơn 2.

Nếu $2^a > x \geq 2^{a-1}$ thì $1 \leq 2^a - x \leq x$, nên B chỉ cần lấy $2^a - x$ bi là A thua.

Vậy sau khi A bốc xong thì B bốc, để A không thua thì số bi còn lại phải lũy thừa đúng của 2 với số mũ không nhỏ hơn 2 và số mũ đã giảm đi 1 đơn vị. Vậy cứ lặp lại sau hữu hạn bước B sẽ thắng.

Bây giờ, ta chứng minh chiều đảo, giả sử n là số mà B có cách để thắng. Ta có nhận xét

Nhận xét. Nếu khi đến lượt A chơi mà trên bàn có một số lẻ bi, thì A thắng. Thực vậy, A chỉ cần lấy 1 viên, các bước sau mỗi người chỉ lấy một viên, số bi còn lại khi đến lượt A luôn lẻ, do đó A thắng.

Vậy B phải tìm cách cho số bi còn lại của A luôn là số chẵn và phải lớn hơn số bi mình vừa bốc.

.....**HẾT NGÀY 1**.....

TS. **Hà Duy Hưng**