

Bài 1. (1,5 điểm)

Cho tập nghiệm của phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)(x^2 + ex + f) = 0$ là $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + c^2 + e^2 - 2.(b + d + f)$.

Bài 2. (2,0 điểm)

Giải các phương trình:

a) $(\sqrt{x+5})^3 = 6x+5$

b) $\sqrt[3]{3x+6} + \sqrt{23-x} = 7$

Bài 3. (1,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC có đường cao BE, CF cắt nhau tại H và M là trung điểm BC. Đường thẳng qua A và vuông góc với EF cắt đường trung trực của BC tại O.

a) Chứng minh $AH = 2.OM$

b) Chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 4. (1,5 điểm)

Với các số thực dương a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 2$.

a) Chứng minh $a + b \leq 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{2024}{a + b + 2}$.

Bài 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC của (O) ($BE < BA$). Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm K, L sao cho $BK = BE$, $CL = CE$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và KL.

a) Chứng minh $\angle BNC = 90^\circ$.

b) Gọi F là điểm thuộc (O) sao cho EF song song với BC. Chứng minh MN song song với AF.

Bài 6. (1,5 điểm)

a) Cho một hình vuông cạnh 8 cm có chứa bên trong 2024 điểm phân biệt. Chứng minh rằng có thể vẽ được một đường tròn bán kính 1,5 cm có chứa bên trong ít nhất 127 điểm trên.



- b) Cặp số nguyên dương $(a; b)$ được gọi là cặp số “may mắn” của số n nếu $a + b = n$ và tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn đẳng thức $\frac{4}{a} + \frac{4}{b} = \frac{1}{p}$. Tìm các cặp số “may mắn” của số 2025.

---HẾT---

Bài 1. (1,5 điểm)

Cho tập nghiệm của phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)(x^2 + ex + f) = 0$ là $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + c^2 + e^2 - 2.(b + d + f)$.

Giải

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)(x^2 + ex + f) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + ax + b = 0 & (1) \\ x^2 + cx + d = 0 & (2) \\ x^2 + ex + f = 0 & (3) \end{cases}$$

Vì vai trò của a, c, e và vai trò của b, d, f là như nhau nên ta có thể giả sử:

Phương trình (1) có hai nghiệm là 1; 2.

Phương trình (2) có hai nghiệm là 3; 4.

Phương trình (3) có hai nghiệm là 5; 6.

Khi đó:

$$\begin{cases} a = -3 ; b = 2 \\ c = -7 ; d = 12 \\ e = -11 ; f = 30 \end{cases}$$

Như vậy:

$$T = a^2 + c^2 + e^2 - 2.(b + d + f)$$

$$T = (-3)^2 + (-7)^2 + (-11)^2 - 2.(2 + 12 + 30)$$

$$T = 91$$

Bài 2. (2,0 điểm)

Giải các phương trình:

a) $(\sqrt{x+5})^3 = 6x + 5$

b) $\sqrt[3]{3x+6} + \sqrt{23-x} = 7$

Giải

a) $(\sqrt{x+5})^3 = 6x + 5 \quad (1)$



_ Đặt: $\sqrt{x+5} = t$ ($t \geq 0$)

_ Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow t^3 - 6t^2 + 25 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-5)(t^2 - t - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-5=0 \\ t^2 - t - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=5 \\ t = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \\ t = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

_ Trường hợp $t = 5 \Rightarrow x = 20$

_ Trường hợp $t = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{1+\sqrt{21}}{2} \right)^2 - 5 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là:

$$\left\{ \frac{1+\sqrt{21}}{2} ; 20 \right\}$$

b) $\sqrt[3]{3x+6} + \sqrt{23-x} = 7$

Đặt: $a = \sqrt[3]{3x+6}$; $b = \sqrt{23-x}$ ($x \leq 23, b \geq 0$)

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b=7 \\ a^3+3b^2=75 \end{cases}$$

Thay $b = 7 - a$ vào phương trình:

$$a^3 + 3b^2 = 75$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 3(7-a)^2 = 75$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 3a^2 - 42a + 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 6a^2 - 18a - 24a + 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-3)(a^2 + 6a - 24) = 0$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 - \sqrt{33} \\ a = -3 + \sqrt{33} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -110 - 20\sqrt{33} \\ a = -110 + 20\sqrt{33} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là:

$$\{7 ; -110 - 20\sqrt{33} ; -110 + 20\sqrt{33}\}$$

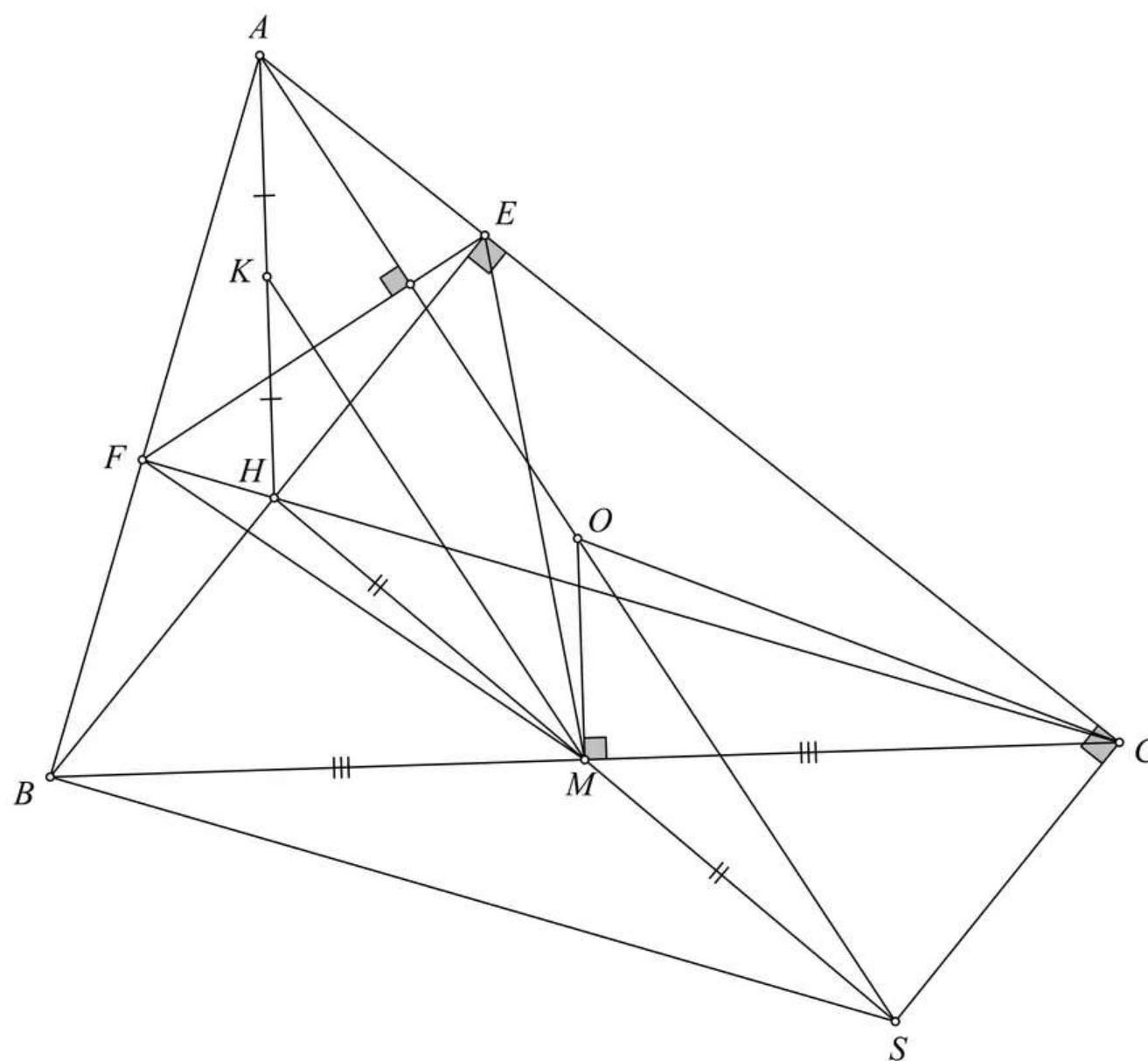
Bài 3. (1,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC có đường cao BE, CF cắt nhau tại H và M là trung điểm BC. Đường thẳng qua A và vuông góc với EF cắt đường trung trực của BC tại O.

a) Chứng minh $AH = 2.OM$

b) Chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải



a) Chứng minh $AH = 2.OM$

Gọi K là trung điểm AH.

Cmđ: $KE = KF$; $ME = MF$

$\Rightarrow MK$ là trung trực EF.

$\Rightarrow MK \perp EF \Rightarrow MK \parallel OA$

Mà: $OM \parallel AH (\perp BC)$

$\Rightarrow AKMO$ là hình bình hành.

$\Rightarrow OM = AK = \frac{1}{2} AH \Rightarrow \text{đpcm !}$



b) Chứng minh O là tâm (ABC)

Kéo dài AO cắt HM tại S.

Xét ΔAHS :

K là trung điểm AH, $KM \parallel AS$

$\Rightarrow M$ là trung điểm HS.

Mà: M là trung điểm BC

$\Rightarrow BHCS$ là hình bình hành.

$\Rightarrow SC \perp AC$ tại C ($BH \perp AC$)

Cmđ: O là trung điểm AS.

Xét ΔACS vuông tại C có CO là trung tuyến $\Rightarrow CO = AO = \frac{1}{2} AS$

Mà: $CO = CB$ (O $\in$ trung trực BC)

Vậy: $OC = OB = OA \Rightarrow \text{đpcm !}$

Bài 4. (1,5 điểm)

Với các số thực dương a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 2$.

a) Chứng minh $a + b \leq 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{2024}{a + b + 2}$.

Giải

a) Chứng minh $a + b \leq 2$.

$$\text{Cmđ: } \frac{(a+b)^2}{2} \leq a^2 + b^2; \forall a, b (*)$$

$$\text{Khi đó: } \frac{(a+b)^2}{2} \leq a^2 + b^2 \leq 2 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 4$$

Mà a, b > 0 nên $a + b \leq 2$: đpcm !

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P

$$\text{Áp dụng (*), ta có: } P \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) + \frac{2024}{a+b+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+2) + \frac{8\sqrt{2}}{a+b+2} + \frac{2024-8\sqrt{2}}{a+b+2} - \sqrt{2}$$

Áp dụng AM-GM cho hai số dương: $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+2)$; $\frac{8\sqrt{2}}{a+b+2}$ và kết quả $a + b \leq 2$, ta có:

$$P \geq 4\sqrt{2} + \frac{2024-8\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2} = \sqrt{2} + 506$$

Dấu “=” xảy ra



$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 2 \\ a^2 + b^2 \leq 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b + 2) = \frac{8\sqrt{2}}{a + b + 2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1. \text{ Vậy: } P_{\min} = \sqrt{2} + 506 \text{ tại } a = b = 1.$$

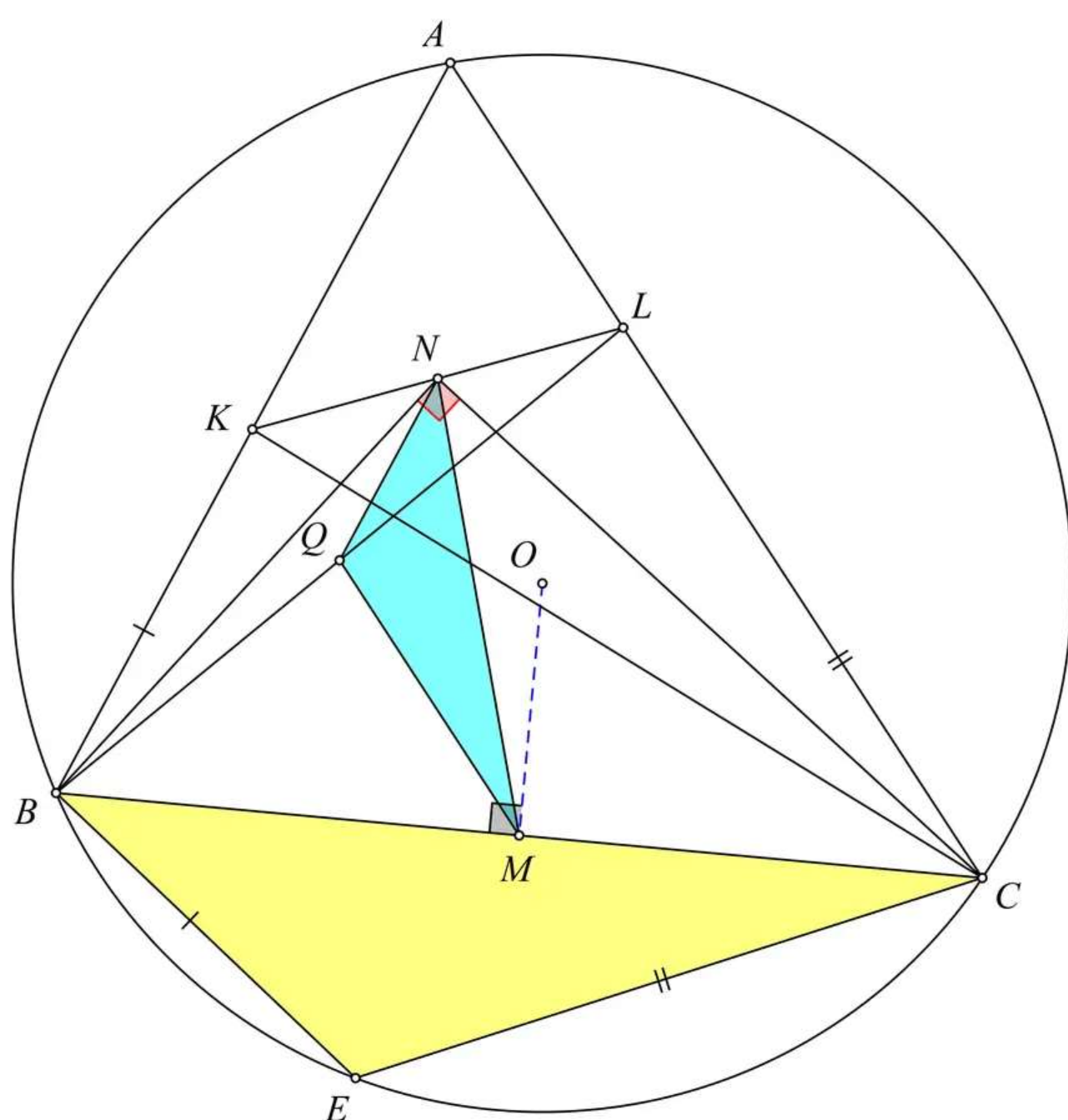
Bài 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC của (O) ($BE < BA$). Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm K, L sao cho $BK = BE$, $CL = CE$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và KL.

a) Chứng minh $\angle BNC = 90^\circ$.

b) Gọi F là điểm thuộc (O) sao cho EF song song với BC. Chứng minh MN song song với AF.

Giải



a) Chứng minh $\angle BNC = 90^\circ$.

Gọi Q là trung điểm BL.

$$\text{Cmđ: } \frac{NQ}{BK} \left(= \frac{NQ}{BE} \right) = \frac{MQ}{EC} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\angle MQN = \angle NQL + \angle MQL = \underbrace{\angle ABL + \angle LBC}_{\angle ABC} + \angle BMQ$$

Ta có:

$$= \angle ABC + \angle BCA = \frac{1}{2} \text{Sđ} \angle BAC = \angle BEC \quad (2)$$

Từ (1) & (2) $\Rightarrow \triangle NQM \sim \triangle BEC$



$$\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}.$$

Xét $\triangle BNC$ có: NM là trung tuyến và $NM = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \triangle BNC$ vuông tại $N \Rightarrow \text{đpcm!}$

b) Chứng minh MN song song AF .

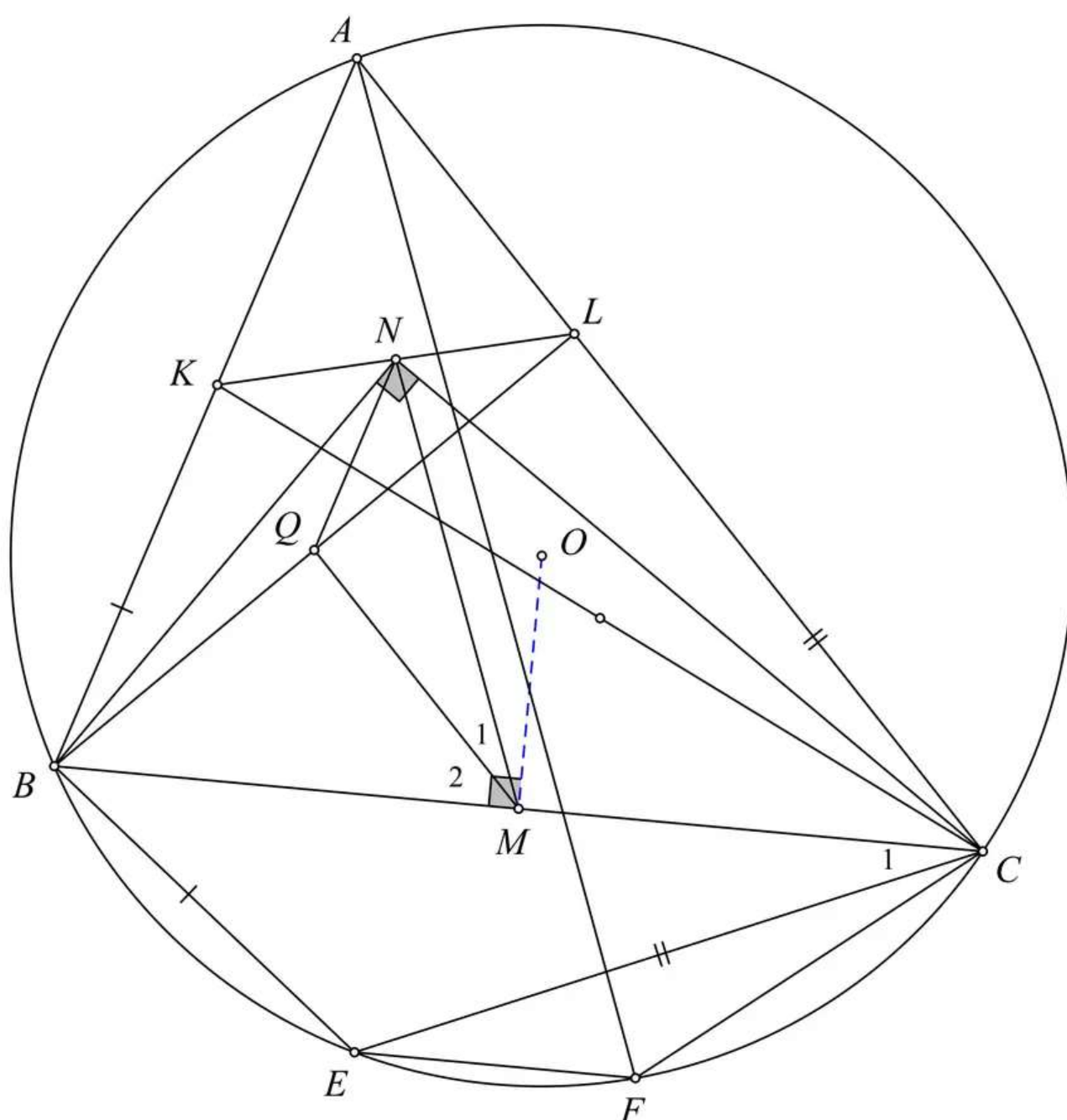
$$\triangle NQM \sim \triangle BEC \Rightarrow M_1 = C_1$$

$$\text{Lại có: } M_2 = ACB$$

$$\Rightarrow NMB = ACE = AFE$$

$$\text{Mà: } ACE = AFE \text{ (cùng chắn } ABE \text{)}$$

$$\text{Như vậy: } NMB = AFE \Rightarrow \text{đpcm!}$$



Bài 6. (1,5 điểm)

a) Cho một hình vuông cạnh 8 cm có chứa bên trong 2024 điểm phân biệt. Chứng minh rằng có thể vẽ được một đường tròn bán kính 1,5 cm có chứa bên trong ít nhất 127 điểm trên.

b) Cặp số nguyên dương $(a; b)$ được gọi là cặp số “may mắn” của số n nếu $a + b = n$ và tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn đẳng thức $\frac{4}{a} + \frac{4}{b} = \frac{1}{p}$. Tìm các cặp số “may mắn” của số 2025.

Giải

1	2	3	4
2			



3			
4			

Chia hình vuông cạnh 8 cm thành các hình vuông nhỏ cạnh 2 cm (như hình vẽ).

Theo nguyên lý ĐI-RICH-LE sẽ có ít nhất một hình vuông chứa $\left[\frac{2024}{16} \right] + 1 = 127$ (điểm)

Hình vuông này nội tiếp trong đường tròn có đường kính $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ (cm).

Như vậy tồn tại đường tròn có bán kính $\sqrt{2}$ (cm) chứa 127 điểm trên.

Vì $\sqrt{2} < 1,5$ nên đường tròn bán kính 1,5 cm (có tâm là tâm đường tròn trên) chứa tất cả 127 điểm trên : đpcm !

b) Gọi (a ; b) là cặp số may mắn của số $n = 2025 = a + b$.

$$\text{Ta có: } \frac{4}{a} + \frac{4}{b} = \frac{1}{p} \Rightarrow 4ap + 4bp = ab$$

$$\text{Xét } (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 2025^2 - 16p(a + b) = 2025^2 - 16p \cdot 2025 = 45^2 \cdot (2025 - 16p)$$

$$\Rightarrow 2025 - 16p = k^2 \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (45 + k)(45 - k) = 16p \quad (*)$$

- Xét $p = 2$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} 45 + k = 2^m \\ 45 - k = 2^n \end{cases} \quad (m > n; m + n = 5)$$

$$\text{Để thấy } n = 0; 1 \text{ vô lí} \Rightarrow n > 1 \Rightarrow 45 = 2^{n-1} \cdot (2^{m-n} + 1) : \text{vô lí !}$$

- Xét $p \geq 3$:

$$16p = 2 \cdot 8p = 4 \cdot 4p = 8 \cdot 2p ; \text{Giả sử } 45 + k \geq 45 - k \text{ (ngược lại cmtt).}$$

$$\begin{cases} 45 + k = 8 \\ 45 - k = 2p \end{cases} \vee \begin{cases} 45 + k = 4p \\ 45 - k = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} 45 + k = 8p \\ 45 - k = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -37 \\ p = 41 \end{cases} \vee \begin{cases} k = 41 \\ p \notin \mathbb{N} \end{cases} \vee \begin{cases} k = 43 \\ p = 11 \end{cases}$$

$$* \text{ Trường hợp: } \begin{cases} k = -37 \\ p = 41 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a - b)^2 = 45^2 \cdot (2025 - 16 \cdot 41) \Rightarrow a - b = 1665$$

$$\text{Kết hợp } a + b = 2025 \Rightarrow \begin{cases} a = 1845 \\ b = 180 \end{cases} . \text{ Thử lại: } \frac{4}{1845} + \frac{4}{180} = \frac{1}{41}$$



* Trường hợp: $\begin{cases} k = 43 \\ p = 11 \end{cases}$

$$\Rightarrow (a - b)^2 = 45^2 \cdot (2025 - 16 \cdot 11) \Rightarrow a - b = 1935$$

Kết hợp $a + b = 2025 \Rightarrow \begin{cases} a = 1980 \\ b = 45 \end{cases}$. Thử lại: $\frac{4}{1980} + \frac{4}{45} = \frac{1}{11}$

Kết luận: Có 04 (02 cặp và hoán vị) cặp số “may mắn” thỏa đề:

$(1845; 180)$; $(1980; 45)$; $(180; 1845)$; $(45; 1980)$