

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1.(4,0 điểm) Cho biểu thức: $A = \frac{3(x + \sqrt{x} - 1)}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}$, với $x \geq 0$, $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các số nguyên x để A có giá trị nguyên.

Bài 2.(4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $3x^2 + x - 3\sqrt{3x^2 + x + 2} = 2$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{2}{y}} + \sqrt{x + y - 1} = 5 \\ 2x + y + \frac{2}{y} = 14 \end{cases}$$

Bài 3.(4,0 điểm)

a) Tìm ba số nguyên tố đôi một khác nhau, biết rằng tích của ba số đó bằng năm lần tổng của chúng.

b) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $\begin{cases} 0 < a, b, c < \frac{1}{2} \\ 2a + 3b + 4c = 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{2}{a(3b + 4c - 2)} + \frac{9}{b(4a + 8c - 3)} + \frac{8}{c(2a + 3b - 1)} \geq 81.$$

Bài 4.(6,0 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) tâm O , đường kính $AB = 2R$. Gọi Ax, By lần lượt là các tiếp tuyến tại A và B với nửa đường tròn (O) (Ax, By và nửa đường tròn (O) nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M tùy ý thuộc nửa đường tròn (O) ($M \neq A, M \neq B$) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn (O) cắt Ax, By lần lượt tại C và D .

a) Chứng minh tứ giác $OBDM$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh: $AC \cdot BD = R^2$.

c) Chứng minh: AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle OCD$.

d) Cho $AB = 8$ cm. Tìm vị trí của điểm C để chu vi tứ giác $ABDC = 28$ cm, từ đó tính diện tích nằm trong tứ giác $ABDC$ và nằm ngoài nửa đường tròn (O) .

Bài 5.(2,0 điểm)

Cho dãy số tự nhiên $1; 2; 3; \dots; 2024$. Mỗi lần ta xóa đi hai số của dãy và ghi thêm vào dãy đó giá trị tuyệt đối của hiệu hai số đã bị xóa, tiếp tục lần như thế cho đến khi dãy số còn đúng 100 số. Khi đó, tổng của 100 số đó có thể là 2023 được không? Hãy giải thích nhận định đã đưa ra.

HẾT

ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC**HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI HSG LỚP 9**

Bài 1.(4,0 điểm) Cho biểu thức: $A = \frac{3(x + \sqrt{x} - 1)}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}$, với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các số nguyên x để A có giá trị nguyên.

Giải

a) Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3(x + \sqrt{x} - 1)}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{3(x + \sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{3(x + \sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 2)^2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{(3x + 3\sqrt{x} - 3) - (x - 1) - (x + 4\sqrt{x} + 4)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{x - \sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}. \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 1$ thì $A = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$.

b) Ta có: $A = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$.

Nhận xét $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} - 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Ta có bảng giá trị sau đây:

$\sqrt{x} - 1$	1	-1	2	-2
x	4 (nhận)	0 (nhận)	9 (nhận)	Không xác định
A	-1	3	0	Không xác định

Vậy các giá trị nguyên x thỏa mãn đề bài là 4; 0; 9.

Bài 2.(4,0 điểm)**a)** Giải phương trình: $3x^2 + x - 3\sqrt{3x^2 + x + 2} = 2$.**b)** Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{2}{y}} + \sqrt{x + y - 1} = 5 \\ 2x + y + \frac{2}{y} = 14 \end{cases}$$
.**Giải****a)** Điều kiện: $3x^2 + x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq 0$.

Bất đẳng thức này luôn đúng. Vậy hai vế của phương trình luôn xác định.

Phương trình viết lại: $3x^2 + x - 3\sqrt{3x^2 + x + 2} = 2$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + x + 2 - 3\sqrt{3x^2 + x + 2} - 4 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{3x^2 + x + 2}$ ($t \geq 0$), phương trình trở thành:

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t+1=0 \\ t-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \text{ (loại)} \\ t=4 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

+) Với $t = 4$ ta có: $\sqrt{3x^2 + x + 2} = 4$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + x + 2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + x - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(3x+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 3x+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2$; $x = -\frac{7}{3}$.**b)** Điều kiện:
$$\begin{cases} x + \frac{2}{y} \geq 0 \\ x + y - 1 \geq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$
Hệ phương trình viết lại:
$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{2}{y}} + \sqrt{x + y - 1} = 5 \\ 2x + y + \frac{2}{y} = 14 \end{cases}$$
Đặt $a = \sqrt{x + \frac{2}{y}} \geq 0$, $b = \sqrt{x + y - 1} \geq 0 \Rightarrow 2x + y + \frac{2}{y} = a^2 + b^2 + 1$. Khi đó, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a^2+b^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ a=3 \\ b=2 \end{cases}.$$

+) Với $a=2, b=3$ ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+\frac{2}{y}}=2 \\ \sqrt{x+y-1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{2}{y}=4 \\ x+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10-x \\ x+\frac{2}{10-x}-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=10-x \\ -x^2+14x-38=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10-x \\ x=7\pm\sqrt{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+\sqrt{11} \\ y=3-\sqrt{11} \\ x=7-\sqrt{11} \\ y=3+\sqrt{11} \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện xác định, ta nhận được hai nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (7 \pm \sqrt{11}; 3 \mp \sqrt{11})$.

+) Với $a=3, b=2$ ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+\frac{2}{y}}=3 \\ \sqrt{x+y-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{2}{y}=9 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ x+\frac{2}{5-x}-9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ -x^2+14x-43=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ x=7\pm\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+\sqrt{6} \\ y=-2-\sqrt{6} \\ x=7-\sqrt{6} \\ y=-2+\sqrt{6} \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện xác định, ta nhận được hai nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (7 \pm \sqrt{6}; -2 \mp \sqrt{6})$.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(x; y) = (7 \pm \sqrt{11}; 3 \mp \sqrt{11}); (x; y) = (7 \pm \sqrt{6}; -2 \mp \sqrt{6})$

Bài 3.(4,0 điểm)

a) Tìm ba số nguyên tố đôi một khác nhau, biết rằng tích của ba số đó bằng năm lần tổng của chúng.

b) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $\begin{cases} 0 < a, b, c < \frac{1}{2} \\ 2a+3b+4c=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{2}{a(3b+4c-2)} + \frac{9}{b(4a+8c-3)} + \frac{8}{c(2a+3b-1)} \geq 81.$$

Giải

a) Gọi p, q, r là ba số nguyên tố thỏa mãn đề bài. Khi đó, theo đề bài, ta có:

$$pqr = 5(p+q+r) \quad (*)$$

Vậy ta được $pqr:5$. Do đó, một trong ba số này phải chia hết cho 5 hay một trong ba số này phải bằng 5 (vì cả ba số này đều là số nguyên tố). Không mất tính tổng quát, giả sử $p=5$. Khi đó, (*) viết lại:

$$qr = q+r+5$$

$$\Leftrightarrow qr - q - r + 1 = 6$$

$$\Leftrightarrow (q-1)(r-1) = 6.$$

Vậy ta có các khả năng sau:

$q-1$	1	2	3	6
$r-1$	6	3	2	1
q	2	3	4	7
r	7	4	3	2

Đối chiếu các trường hợp vừa tìm được với giả thiết đề bài, ta được bộ ba số nguyên tố thỏa mãn đề bài là $(2; 5; 7)$.

Chú ý: Nếu đề không yêu cầu như trên mà yêu cầu tìm ba số nguyên tố phân biệt p, q, r thỏa mãn (*) thì phải kết luận bộ $(2; 5; 7)$ và các hoán vị của chúng).

b) Ta có: $2a^2 + \frac{2}{9} \geq 2\sqrt{\frac{4}{9}a^2} = \frac{4}{3}a$

$$3b^2 + \frac{3}{9} \geq 2\sqrt{\frac{9}{9}b^2} = 2b$$

$$4c^2 + \frac{4}{9} \geq 2\sqrt{\frac{16}{9}c^2} = \frac{8}{3}c$$

$$\text{Vậy } 2a^2 + 3b^2 + 4c^2 + 1 \geq \frac{4}{3}a + 2b + \frac{8}{3}c = \frac{2}{3}(2a + 3b + 4c) = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 3b^2 + 4c^2 \geq 2 - 1 = 1.$$

$$\text{Ta có: } \frac{2}{a(3b+4c-2)} = \frac{2}{a(1-2a)} = \frac{4}{2a(1-2a)} = \frac{4}{2a-4a^2}$$

$$\frac{9}{b(4a+8c-3)} = \frac{9}{b(3-6b)} = \frac{9}{3b(1-2b)} = \frac{9}{3b-6b^2}$$

$$\frac{8}{c(2a+3b-1)} = \frac{8}{2c(1-2c)} = \frac{16}{4c(1-2c)} = \frac{16}{4c-8c^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } A &= \frac{2}{a(3b+4c-2)} + \frac{9}{b(4a+8c-3)} + \frac{8}{c(2a+3b-1)} \\ &= \frac{4}{2a-4a^2} + \frac{9}{3b-6b^2} + \frac{16}{4c-8c^2} \\ &\geq \frac{(2+3+4)^2}{(2a+3b+4c)-2(2a^2+3b^2+4c^2)} \geq \frac{81}{3-2.1} = 81 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Chú ý: Nếu trình bày theo cách này, học sinh cần chứng minh lại bất đẳng thức sau đây trước khi áp dụng vào bài để tránh bị mất điểm.

Cho a, b, c, x, y, z là các số thực và $x, y, z > 0$. Khi đó ta có: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

Dấu "=" xảy ra tại $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Bài 4.(6,0 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) tâm O , đường kính $AB = 2R$. Gọi Ax , By lần lượt là các tiếp tuyến tại A và B với nửa đường tròn (O) (Ax , By và nửa đường tròn (O) nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua

điểm M tùy ý thuộc nửa đường tròn (O) ($M \neq A, M \neq B$) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn (O) cắt Ax, By lần lượt tại C và D .

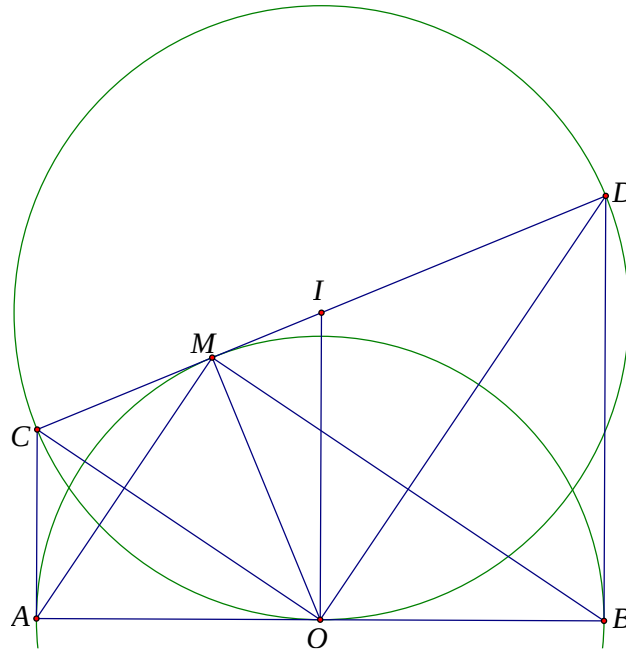
a) Chứng minh tứ giác $OBDM$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh: $AC \cdot BD = R^2$.

c) Chứng minh: AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle OCD$.

d) Cho $AB = 8$ cm. Tìm vị trí của điểm C để chu vi tứ giác $ABDC = 28$ cm, từ đó tính diện tích nằm trong tứ giác $ABDC$ và nằm ngoài nửa đường tròn (O) .

Giải



a) Tứ giác $OBDM$ có: $OBM + ODM = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Vậy tứ giác $OBDM$ nội tiếp.

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $CA = CM, DB = DM$.

Chứng minh $\angle COD = 90^\circ$.

$\triangle COD$ vuông ở O , đường cao OM có $AC \cdot BD = MC \cdot MD = MO^2 = R^2$

c) Rõ ràng tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle COD$ là trung điểm I của OD .

Đề ý tứ giác $ABDC$ là hình thang vuông có OI là đường trung bình. Từ đó ta được $IO \perp AB$ tại O hay ta có đpcm.

d) Từ các câu trên, ta có: $CM = CA, DM = DB \Rightarrow CD = CA + DB = 2OI$

Do đó theo đề bài ta được: $AB + BD + DC + CA = 8 + 4OI = 28 \Rightarrow OI = 5$ cm

Vậy ta được hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} AC + BD = 2OI = 10 \\ AC \cdot BD = R^2 = 4^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC = 8 \\ BD = 2 \\ AC = 2 \\ BD = 8 \end{cases}$$

Vậy điểm C thỏa mãn bài toán sẽ nằm trên tia Ax và cách A một khoảng là 2 cm hoặc 8 cm.

Khi đó, diện tích phần hình cần tìm là: $S = S_{ABDC} - \frac{1}{2} S_{(O)} = \frac{10 \cdot 8}{2} - \frac{16\pi}{2} = 40 - 8\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Bài 5.(2,0 điểm)

Cho dãy số tự nhiên 1; 2; 3;...; 2024. Mỗi lần ta xóa đi hai số của dãy và ghi thêm vào dãy đó giá trị tuyệt đối của hiệu hai số đã bị xóa, tiếp tục làm như thế cho đến khi dãy số còn đúng 100 số. Khi đó, tổng của 100 số đó có thể là 2023 được không? Hãy giải thích nhận định đã đưa ra.

Giải

Câu trả lời là phủ định.

Thật vậy, ban đầu ta có tổng của 2024 số này là: $S = \frac{2024 \cdot 2025}{2} = 1012 \cdot 2025$ là số chẵn. Khi ta thực hiện thao tác xóa hai số x, y bất kì ($x \geq y$) và thêm vào số $|x - y|$ thì ta được tổng các số của dãy lúc đó là:

$$S - (x + y) + |x - y| = S - (x + y) + (x - y) = S - 2y$$

luôn là số chẵn. Và sau mỗi lần thực hiện thao tác, thì tổng các số của dãy sau đó cũng là số chẵn. Vậy trường hợp ở đề bài là không thể xảy ra (đpcm).

♡HẾT♡