

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG TRỊ
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN
NĂM HỌC 2024 - 2025
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian
phát đề)
Đề thi gồm có 01 trang

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - 4\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} - \frac{b}{a - 4b} \right)$, với a và b là các số thực

dương thoả mãn $a \neq 4b$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P khi $a^2 + b^2 = 14ab$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{3}{2x-y} + \frac{10}{\sqrt{x+3y}} = 5 \\ \frac{9-2x+y}{2x-y} - \frac{5}{\sqrt{x+3y}} = 7 \end{cases}$$

2. Giải phương trình $\frac{5x}{x^2+3} + \frac{2x^2-x+6}{x^2-2x+3} = 4$.

Câu 3. (1,5 điểm)

a) Chứng minh rằng $\sqrt{2(x^2-1)} \leq \frac{3x-1}{2}$, với $x \geq 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$, với x, y, z là các số thực

không nhỏ hơn 1 và thoả mãn $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{xyz}$.

Câu 4. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab} + \overline{ba}$ là số chính phương.

2. Cho hai đồng sỏi, A và B . Nếu chuyển 100 viên sỏi từ đồng A sang đồng B thì số sỏi ở đồng B gấp đôi số sỏi ở đồng A . Còn nếu chuyển một số viên sỏi từ đồng B sang đồng A thì số sỏi ở đồng A gấp 6 lần số sỏi ở đồng B . Hỏi đồng A có ít nhất bao nhiêu viên sỏi?

Câu 5. (3,0 điểm) Trên đường tròn đường kính AB , lấy các điểm C và D sao cho $BC = BD < \frac{1}{2}AB$. Gọi E là điểm đối xứng với D qua đường thẳng BC , AE cắt tia CB tại F , cắt

đường tròn (B, BC) tạo $H (H \neq E)$, CH cắt AB tại I .

a) Chứng minh DC là tia phân giác của góc ADE .

b) Chứng minh năm điểm B, D, F, H và I cùng nằm trên một đường tròn.

c) AD cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFDH$ tại $J (J \neq D)$, JF cắt CD tại K . Chứng minh DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng JK .

ĐÁP ÁN THAM KHẢO
ĐỀ THI VÀO CHUYÊN TOÁN - TỈNH QUẢNG TRỊ

Câu 1.

a. Với $a \neq 4b$, ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - 1 + 1 - \frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) \cdot \left(\frac{(\sqrt{a} + 2\sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - 2\sqrt{b})(\sqrt{a} + 2\sqrt{b})} - \frac{b}{a - 4b} \right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) \cdot \left(\frac{a + 3\sqrt{ab} + 2b}{a - 4b} - \frac{b}{a - 4b} \right) = \frac{a - 4b}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{a + \sqrt{3ab} + b}{a - 4b} = \frac{a + 3\sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}}$$

b. Ta có $a^2 + b^2 = 14ab \Leftrightarrow (a + b)^2 = 16ab \Leftrightarrow a + b = 4\sqrt{ab}$, do a, b là các số thực dương. Khi đó: $P = \frac{a + 3\sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}} = \frac{4\sqrt{ab} + 3\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = 7$.

Câu 2.

1. Điều kiện: $x + 3y > 0, x \neq 2y (*)$.

Từ hệ phương trình ban đầu:

$$\begin{cases} \frac{3}{2x-y} + \frac{10}{\sqrt{x+3y}} = 5 \\ \frac{9-2x+y}{2x-y} - \frac{5}{\sqrt{x+3y}} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2x-y} + \frac{10}{\sqrt{x+3y}} = 5 \\ \frac{9}{2x-y} - 1 - \frac{5}{\sqrt{x+3y}} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2x-y} + \frac{10}{\sqrt{x+3y}} = 5 \\ \frac{9}{2x-y} - \frac{5}{\sqrt{x+3y}} = 8 \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{1}{2x-y}, b = \frac{1}{\sqrt{x+3y}}$. Khi đó hệ phương trình trên trở thành:

$$\begin{cases} 3a + 10b = 5 \\ 9a - 5b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 10b = 5 \\ 18a - 10b = 16 \end{cases} \#(1)$$

Lấy (1) và (2) cộng vế theo vế, ta được: $21a = 21 \Leftrightarrow a = 1$. Kết hợp với (1) suy ra $b = \frac{5-3a}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

$$\text{Do đó: } \begin{cases} \frac{1}{2x-y} = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x+3y}} = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ \sqrt{x+3y}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ x+3y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases}, \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x=4, y=7$.

2. Ta thấy $x^2 - 2x + 3 > 0, \forall x$ và $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Đặt $t = \frac{x^2+3}{x}$. Khi đó phương trình ban đầu trở thành:

$$\frac{5x}{x^2+3} + \frac{2 \cdot \frac{x^2+3}{x} - 1}{\frac{x^2+3}{x} - 2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{t} + \frac{2t-1}{t-2} = 4 \Leftrightarrow \frac{5(t-2) + (2t-1)t}{t(t-2)} = 4 \Leftrightarrow 2t^2 + 4t - 10 = 4t^2 - 8t$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 12t + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 1 \end{cases}$$

Trường hợp: $t = 5 \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{x} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$. (thoả mãn)

Trường hợp: $t = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$. (vô nghiệm)

Câu 3.

a. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ với số dương $\sqrt{2x-2}, \sqrt{x+1}$, ta có:

$$\sqrt{2(x^2-1)} = \sqrt{2x-2} \cdot \sqrt{x+1} \leq \frac{2x-2+x+1}{2} = \frac{3x-1}{2}, \forall x \geq 1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{2x-2} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2x-2 = x+1 \Leftrightarrow x = 3$.

b. Do với $\forall x, y, z \geq 1$. Khi đó kết hợp với câu a, ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} + \frac{\sqrt{z^2-1}}{z} \leq \frac{3x-1}{2\sqrt{2}} + \frac{3y-1}{2\sqrt{2}} + \frac{3z-1}{2\sqrt{2}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{2}x} + \frac{3y-1}{2\sqrt{2}y} + \frac{3z-1}{2\sqrt{2}z}$$

Từ giả thiết có $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{xyz} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} = 1$.

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Leftrightarrow - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq -1$$

Nguyễn Trần Hoàng - Trường ĐH Su Phạm Hà Nội - K73

Từ (*) ta tiếp tục có: $P \leq \frac{9}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x = y = z = 3$.

Câu 4.

a. Đặt $A = \overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a + b)$.

Vì $\overline{ab}$ là số có hai chữ số nên $a \neq 0$. Ta thấy $1 \leq a + b \leq 18$.

Giả sử A là số chính phương, thì khi phân tích A thành các thừa số nguyên tố thì số mũ các thừa số nguyên tố phải chẵn, tức là giả sử $A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_i^{a_i}$, với các $p_1, p_2, \dots, p_i$ là các số nguyên tố thì $a_1, a_2, \dots, a_i$ đều là số chẵn.

Do đó, nếu A không chia hết cho 11 thì số mũ của số nguyên 11 khi phân tích sẽ là 1, mâu thuẫn.

Khi đó $a+b:11 \Rightarrow a+b=11$. Hay ta có các cặp giá trị sau thoả mãn:

$$(a;b) \in \{(2;9);(3;8);(4;7);(5;6);(6;5);(7;4);(8;3);(9;2)\}$$

Thử lại ta thấy thoả mãn. Vậy có số có hai chữ số $\overline{ab}$ cần tìm là:

$$\overline{ab} \in \{29;38,47,56,65,74,83,92\}$$

b. Gọi số viên sỏi ở hai đồng A, B là x, y . Theo bài ta có:

Nếu chuyển 100 viên từ đồng A sang đồng B thì số sỏi ở B gấp 2 lần số sỏi ở A , tức là $2(x-100) = y+100$ (1).

Nếu chuyển một số viên từ đồng B (giả sử là a) sang đồng A thì số sỏi ở A gấp 6 lần số sỏi ở B , tức là $x+a = 6(y-a)$

Từ (1)(2), có:

$$\begin{cases} 2x-y=300 \\ 6y-x=7a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=300 \\ 12y-2x=14a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6y-7a=6 \cdot \frac{14a+300}{11}-7a=\frac{7a+1800}{11} \\ y=\frac{14a+300}{11}=27+a+\frac{3(a+1)}{11} \end{cases}$$

Vì y nguyên nên $\frac{3(a+1)}{11}$ nguyên hay $a+1:11$, do $\gcd(11,3)=1$.

Suy ra $a=11k-1, k$ là số nguyên dương. Khi đó: $\begin{cases} x=7k+163 \geq 7 \cdot 1+163=170 \\ y=14k+26 \end{cases}$.

Khi $k=1$. Thử lại với $x=170, y=40$ thoả mãn.

Vậy số sỏi ít nhất của đồng A là: 170.

Câu 5. Gọi O là trung điểm AB , nên O là tâm đường tròn đường kính AB .



