

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LẠNG SƠN
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn thi: TOÁN
Thời gian: 150 phút
Ngày thi: 22/03/2024

Bài 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{9x-18\sqrt{x}}$

- a) Rút gọn biểu thức P.
b) Tìm giá trị của x để $P < 3$.

Bài 2. Cho phương trình $x^2 + 2(m-2)x - 3 - m = 0$ (m là tham số).

- a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m.
b) Tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{5x_1(1-2x_2)}{10-x_2}$

Bài 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 + 6x - 6y + 4 = 0 \\ 4y + \sqrt[3]{13x+1} = x+9 \end{cases}$$

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và K là tâm đường tròn bàng tiếp đỉnh A của tam giác ABC. Đoạn thẳng IK cắt đường tròn (O) tại M và cắt BC tại D.

- a) Chứng minh rằng M cách đều các điểm B, I, C.
b) Chứng minh rằng $MK^2 = MD \cdot MA$.
c) Đường tròn (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại P, Q, E. Gọi F là giao điểm của IP và QE. Chứng minh rằng ba đường thẳng AF, OM và BC đồng quy.

Bài 5. 1) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

- a) $ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq a + b + c$
b) $\frac{a^4b}{a^2+abc} + \frac{b^4c}{b^2+abc} + \frac{c^4a}{c^2+abc} \geq \frac{3}{2}$

2) Cho một hình vuông cạnh 62 cm, trên hình vuông đó ta đặt bất kỳ 2024 điểm. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính $\sqrt{2}$ cm chứa ít nhất 3 điểm trong 2024 điểm nói trên.