

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^3 - 10x^2 + 32x = 36 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 3}$.

b) Cho 2023 số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_{2023} = 2023$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{x_1^2 - x_1 + 2023} + \frac{1}{x_2^2 - x_2 + 2023} + \dots + \frac{1}{x_{2023}^2 - x_{2023} + 2023} \leq 1$.

Câu 2. (5,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x) + f\left(y + \frac{x + f(x)}{2}\right) = 2x + f(f(y)), \forall x, y \geq 0.$$

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC có $AB < BC < CA$. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E và F . Gọi M là trung điểm của đoạn BC .

a) Đường thẳng AI cắt hai đường thẳng DE, DF lần lượt tại X và Y . Chứng minh M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DXY .

b) Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là T . Gọi N là trung điểm của cung $\widehat{BAC}$ của đường tròn (O) . Đoạn thẳng NT cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC tại điểm P . Chứng minh $PM \parallel AD$.

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho x, y là hai số nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x, y) = |12^x - 5^y|$.

-----HẾT-----

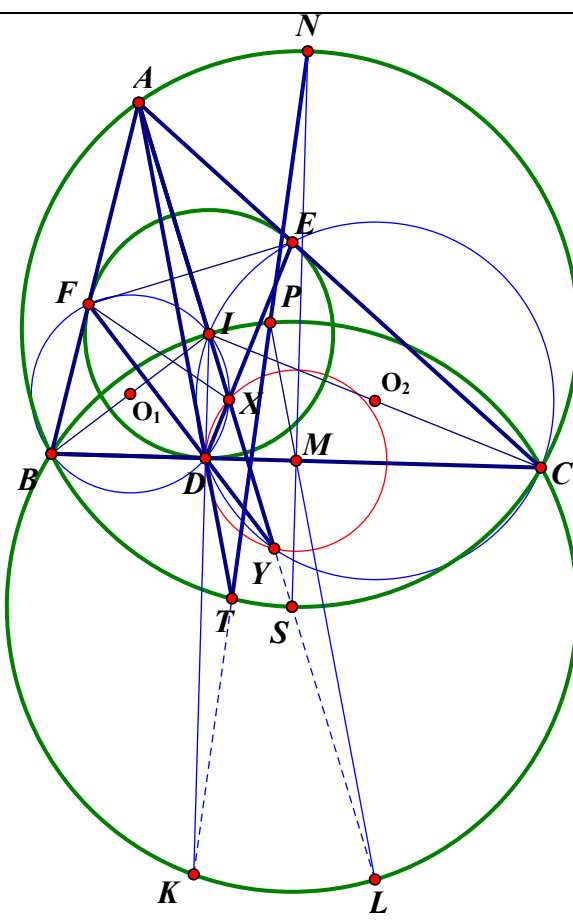
- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên:Số báo danh:

ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM
(gồm 05 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
1 (5đ)	a) Giải phương trình $x^3 - 10x^2 + 32x = 36 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 3}$ (1) b) Cho 2023 số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_{2023} = 2023$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x_1^2 - x_1 + 2023} + \frac{1}{x_2^2 - x_2 + 2023} + \dots + \frac{1}{x_{2023}^2 - x_{2023} + 2023} \leq 1$.	
	a) (1) $\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 2(x - 3) = x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 3}$ $\Leftrightarrow (x - 3)^3 + 2(x - 3) = x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 3}$	0,5
	Xét hàm $f(t) = t^3 + 2t$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow (x - 3)^3 = x^2 - 3x + 3$ (2) $\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = x^2 - 3x + 3$	0,5
	$\Leftrightarrow x^3 = 10(x^2 - 3x + 3) \Rightarrow x^2 - 3x + 3 = \frac{1}{10}x^3$. Do đó (2) $\Leftrightarrow 10(x - 3)^3 = x^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{10}(x - 3) = x \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{10} - 1}$	1
	b) Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có $[x_1^2 + (2023 - x_1)][1 + (2023 - x_1)] \geq [x_1 + (2023 - x_1)]^2 = 2023^2$	1
	$\Rightarrow \frac{1}{x_1^2 - x_1 + 2023} \leq \frac{2024 - x_1}{2023^2}$	0,5
	$\frac{1}{x_1^2 - x_1 + 2023} + \frac{1}{x_2^2 - x_2 + 2023} + \dots + \frac{1}{x_{2023}^2 - x_{2023} + 2023}$ $\leq \frac{2024 - x_1 + \dots + 2024 - x_{2023}}{2023^2} = 1$	1
	Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_{2023} = 1$.	0,5
2 (5đ)	Tìm tất cả các hàm số $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện: $f(x) + f\left(y + \frac{x + f(x)}{2}\right) = 2x + f(f(y)), \forall x, y \geq 0$ (1).	
	+ Giả sử f là một nghiệm hàm. Ta chứng minh f là đơn ánh.	0,5

	Giả sử $a > b \geq 0$ mà $f(a) = f(b)$ Khi đó từ (1) ta có $f\left(y + \frac{a+f(a)}{2}\right) = 2a - f(a) + f(f(y))$ và $f\left(y + \frac{b+f(b)}{2}\right) = 2b - f(b) + f(f(y))$	
	$\Rightarrow f\left(y + \frac{a+f(a)}{2}\right) = f\left(y + \frac{b+f(b)}{2}\right) + 2(a-b)$. Thay y bởi $y - \frac{b+f(b)}{2}$ $\Rightarrow f(y+c) = f(y) + 4c, \forall y \geq \frac{b+f(b)}{2}, c = \frac{a-b}{2} > 0$	0,5
	Bằng qui nạp ta chứng minh được $f(y+nc) = f(y) + 4nc, \forall y \geq \frac{b+f(b)}{2}, n \in \mathbb{N}$	0,5
	Thay x bởi $x+2c \Rightarrow f\left(y + \frac{x+f(x)}{2} + 5c\right) = 2x - f(x) - 4c + f(f(y))$ $\Rightarrow f\left(y + \frac{x+f(x)}{2}\right) + 20c = 2x - f(x) - 4c + f(f(y)) \Rightarrow c = 0$ vô lí vì $c > 0$ Vậy f là đơn ánh.	0,5
	+ Ta chứng minh $f(0) = 0$. Đặt $d = f(0)$ Thay $x = d, y = 0, (1) \Rightarrow f\left(\frac{d+f(d)}{2}\right) = 2d$ (2) Thay $x = 0, (1) \Rightarrow f\left(y + \frac{d}{2}\right) = f(f(y)) - d, \forall y \geq 0$ (3)	0,5
	Do đó (1) $\Leftrightarrow f\left(y + \frac{x+f(x)}{2}\right) = 2x - f(x) + d + f\left(y + \frac{d}{2}\right), \forall x, y \geq 0$ Thay $x = \frac{d}{2}, y = 0 \Rightarrow f\left(\frac{\frac{d}{2} + f\left(\frac{d}{2}\right)}{2}\right) = 2d$ (4)	0,5
	Từ (2), (4) $\Rightarrow f\left(\frac{\frac{d}{2} + f\left(\frac{d}{2}\right)}{2}\right) = f\left(\frac{d+f(d)}{2}\right)$ Mà f là đơn ánh nên $\frac{\frac{d}{2} + f\left(\frac{d}{2}\right)}{2} = \frac{d+f(d)}{2} \Rightarrow f\left(\frac{d}{2}\right) = f(d) + \frac{d}{2}$	1

	Mặt khác từ (3) ta lại có $f\left(\frac{d}{2}\right) = f(d) - d \Rightarrow d = 0 \Rightarrow f(0) = 0$	
	Khi đó (3) $\Rightarrow f(f(y)) = f(y), \forall y \geq 0 \Rightarrow f(y) = y, \forall y \geq 0$ do f đơn ánh	0,5
	Thử lại $f(x) = x, x \geq 0$ thỏa mãn bài toán.	0,5
3 (5d)	Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC có $AB < BC < CA$. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E và F. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. a) Đường thẳng AI cắt hai đường thẳng DE, DF lần lượt tại X và Y. Chứng minh M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $DEXY$. b) Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là T. Gọi N là trung điểm của cung $\widehat{BAC}$ của đường tròn (O). Đoạn thẳng NT cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC tại điểm P. Chứng minh $PM \parallel AD$.	
	 a) Có AI là đường trung trực của EF nên $XE = XF \Rightarrow \widehat{FXE} = 180^\circ - 2\widehat{FEX}$ $= 180^\circ - 2(180^\circ - \widehat{AEF} - \widehat{DEC}) = -180^\circ + 180^\circ - \widehat{BAC} + 180^\circ - \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ $\Rightarrow BFXD$ là tứ giác nội tiếp	0,5

	Mà $IFBD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính BI . Gọi O_1 là trung điểm BI thì I, F, B, D, X thuộc đường tròn (O_1) . Có $MO_1 \parallel IC \Rightarrow MO_1 \perp DE$ mà DX là trục đẳng phương của đường tròn (O_1) và $(DXY) \Rightarrow MO_1$ đi qua tâm của đường tròn (DXY)	1
	Gọi O_2 là trung điểm IC , chứng minh tương tự có MO_2 đi qua tâm đường tròn (DXY) . Do đó M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DXY .	0,5
	b) Gọi ID cắt đường tròn (IBC) tại K và S là giao điểm thứ hai của AI và (O) . Có S, M, N thẳng hàng và $SN \parallel IK$.	0,5
	Có $DK \cdot DI = DB \cdot DC = DA \cdot DT \Rightarrow AITK$ là tứ giác nội tiếp. Do đó $\widehat{ATN} = \widehat{ASN} = \widehat{SIK} = 180^\circ - \widehat{AIK} = 180^\circ - \widehat{ATK} \Rightarrow K, T, N$ thẳng hàng.	1
	Gọi PM cắt (IBC) tại điểm thứ hai là L . Có $MP \cdot ML = MB \cdot MC = MS \cdot MN \Rightarrow NPSL$ là tứ giác nội tiếp. Có $\widehat{IKP} = \widehat{KNS} = \widehat{PNS} = \widehat{SLP} \Rightarrow I, S, L$ thẳng hàng.	1
	$\Rightarrow \widehat{PLI} = \widehat{PKI} = \widehat{TAI} \Rightarrow AT \parallel PL$ hay $PM \parallel AD$.	0,5
4 (5đ)	Cho x, y là hai số nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của $ 12^x - 5^y $.	
	Với $x = y = 1$ thì $ 12^1 - 5^1 = 7$. Ta chứng minh $ 12^x - 5^y $ không thể nhận giá trị nhỏ hơn 7. TH1: $ 12^x - 5^y = a$ với $a \in \{0; 2; 4; 6\}$ vô lí vì $ 12^x - 5^y \equiv 1 \pmod{2}$ mà $a \equiv 0 \pmod{2}$. TH2: $ 12^x - 5^y = 3$ vô lí vì 5^y không chia hết cho 3. TH3: $ 12^x - 5^y = 5$ vô lí vì 12^y không chia hết cho 5.	1
	TH4: $ 12^x - 5^y = 1$ Xét $12^x - 5^y = 1 \Leftrightarrow 12^x = 5^y + 1$ Có $5 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 5^y \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 5^y + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ $\Rightarrow 12^x \equiv 2 \pmod{4}$: vô lí	1
	Xét $12^x - 5^y = -1 \Leftrightarrow 12^x = 5^y - 1$ Có $12^x \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 5^y \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow y = 2k, k \in \mathbb{N}^*$ Khi đó $12^x = 5^{2k} - 1 = (5^k + 1)(5^k - 1)$ $5^k \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 5^k + 1 \equiv 2 \pmod{4}$, suy ra $5^k + 1$ chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4.	1

	Từ đó $2^{2x}.3^x = (5^k + 1)(5^k - 1)$ suy ra $\begin{cases} 5^k + 1 = 2.3^m \\ 5^k - 1 = 2^{2x-1}.3^{x-m} \end{cases}$ với $0 \leq m \leq x$. Vì $(5^k + 1) - (5^k - 1) = 2$ (*) nên chỉ một trong hai số $5^k + 1, 5^k - 1$ chia hết cho 3. Do đó $m = 0$ hoặc $m = x$. Với $m = 0$ thì $5^k + 1 = 2 \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (loại)	1
	Với $m = x$ thì $\begin{cases} 5^k + 1 = 2.3^x \\ 5^k - 1 = 2^{2x-1} \end{cases}$ Từ (*) ta có $2.3^x - 2^{2x-1} = 2 \Leftrightarrow 3^x - 2^{2x-2} = 1 \Leftrightarrow 3^x = 4^{x-1} + 1$ Mà $4^{x-1} + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ nên $3^x \equiv 2 \pmod{3}$: vô lí. Vậy $\min 12^x - 5^y = 7$ khi $x = y = 1$.	1

HƯỚNG DẪN CHẤM

1. Điểm bài thi đánh giá theo thang điểm từ 0 đến 20. Điểm của bài thi là tổng của các điểm thành phần và không làm tròn.
2. Học sinh giải theo cách khác nếu đúng và hợp lí vẫn cho điểm tối đa phần đó.

----- Hết -----