

ĐỀ CHÍNH THỨC**Câu 1.** (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2x - 3m - 2 = 0$ có nghiệm.
2. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = x_1x_2x_3x_4$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $2f(x) + 3f(2-x) = 5x^2 - 8x + 3$ (1) với mọi số thực x .
 - a) Trong đẳng thức (1), thay x bởi $2-x$ và ghi ra kết quả.
 - b) Giải phương trình $f(x) = -1$

$$2. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 13x - 10 - (x - y + 2)\sqrt{x - y + 1} = 0 \\ (3x^2 + 18x - 2xy + 6y - y^2)\sqrt{x - y + 6} - 24x - 8y = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Cho 9 hình vuông có độ dài các cạnh là 9 số nguyên dương liên tiếp. Gọi S là tổng diện tích của 9 hình vuông đã cho. Tồn tại hay không một hình vuông có cạnh là một số nguyên dương và có diện tích bằng S ?
2. Vẽ bất kì 17 đường tròn, mỗi đường tròn có độ dài đường kính là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong 17 đường tròn đó, ta luôn chọn được 5 đường tròn có tổng độ dài các đường kính là một số chia hết cho 5.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ, BC = CD$. Gọi M là trung điểm của AB , đường tròn tâm C bán kính BC (ký hiệu là đường tròn (C)) cắt MD tại $E (E \neq D)$, H là giao điểm của AC và BD .

- a) Chứng minh rằng $\triangle MEB \sim \triangle MBD$ và tứ giác $BHEM$ là tứ giác nội tiếp.
- b) Gọi F là giao điểm của AE và đường tròn (C) ($F \neq E$). Chứng minh rằng $BC \perp DF$.
- c) Gọi I là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn (C) ($I \neq B$), J là giao điểm của AI và DF . Tính tỉ số $\frac{DJ}{DF}$.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho các số thực x, y, z, t thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = xy + xz + xt + yz + yt + 3zt$.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký của cán bộ coi thi 1: Chữ ký của cán bộ coi thi 2:

Lời giải

Câu 1. (2,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2x - 3m - 2 = 0$ có nghiệm.
- 2) Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = x_1x_2x_3x_4$.

Lời giải

1. Phương trình đã cho có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 3m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.
2. Phương trình đã cho tương đương với $(x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) - 1 = 0$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 8x + 7. \text{ Ta được } t^2 + 8t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 + \sqrt{17} \\ t = -4 - \sqrt{17} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó, PT đã cho tương đương } \begin{cases} x^2 + 8x + 11 - \sqrt{17} = 0 \\ x^2 + 8x + 11 + \sqrt{17} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P = x_1x_2x_3x_4 = (11 - \sqrt{17})(11 + \sqrt{17}) = 104$$

Câu 2. (2,0 điểm)

- 1) Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $2f(x) + 3f(2-x) = 5x^2 - 8x + 3$ ⁽¹⁾ với mọi số thực x .
 - a) Trong đẳng thức (1), thay x bởi $2-x$ và ghi ra kết quả.
 - b) Giải phương trình $f(x) = -1$

$$2) \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 13x - 10 - (x-y+2)\sqrt{x-y+1} = 0 \\ (3x^2 + 18x - 2xy + 6y - y^2)\sqrt{x-y+6} - 24x - 8y = 0 \end{cases}$$

Lời giải

$$1. \quad 2f(x) + 3f(2-x) = 5x^2 - 8x + 3 \quad (1)$$

$$\text{a) Trong (1) thay } x \text{ bởi } 2-x \text{ ta được: } 2f(2-x) + 3f(x) = 5(2-x)^2 - 8(2-x) + 3 \\ \Leftrightarrow 3f(x) + 2f(2-x) = 5x^2 - 12x + 7 \quad (2)$$

$$\text{b) Lấy } 2 \times (1) - 3 \times (2) \text{ ta được: } -5f(x) = 2(5x^2 - 8x + 3) - 3(5x^2 - 12x + 7) \\ \Leftrightarrow -5f(x) = -5x^2 + 20x - 15 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

$$\text{Khi đó: } f(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$2. \quad \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 13x - 10 - (x-y+2)\sqrt{x-y+1} = 0 & (1) \\ (3x^2 + 18x - 2xy + 6y - y^2)\sqrt{x-y+6} - 24x - 8y = 0 & (2) \end{cases} \cdot \text{ĐK: } \begin{cases} x-y+1 \geq 0 \\ x-y+6 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow (x-2)^3 + x - 2 = (\sqrt{x-y+1})^3 + \sqrt{x-y+1}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = x-2 \\ b = \sqrt{x-y+1} \end{cases} \text{ ta được: } (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow x-2 = \sqrt{x-y+1}.$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow [(3x+y)(x-y) + 6(3x+y)]\sqrt{x-y+6} - 8(3x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x+y)[(x-y+6)\sqrt{x-y+6} - 8] = 0 \begin{cases} y = -3x \\ \sqrt{x-y+6} = 2 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} y = -3x \\ x-2 = \sqrt{x-y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x \\ x-2 = \sqrt{4x+1} \end{cases} (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 8x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4 + \sqrt{13} \Rightarrow y = -12 - 3\sqrt{13}.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} \sqrt{x-y+6} = 2 \\ x-2 = \sqrt{x-y+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+1 = -3 \\ x-2 = \sqrt{x-y+1} \end{cases} \text{ (Không thỏa mãn ĐK).}$$

So với điều kiện, suy ra hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (4 + \sqrt{13}; -12 - 3\sqrt{13})$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Cho 9 hình vuông có độ dài các cạnh là 9 số nguyên dương liên tiếp. Gọi S là tổng diện tích của 9 hình vuông đã cho. Tồn tại hay không một hình vuông có cạnh là một số nguyên dương và có diện tích bằng S ?

2) Vẽ bất kì 17 đường tròn, mỗi đường tròn có độ dài đường kính là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong 17 đường tròn đó, ta luôn chọn được 5 đường tròn có tổng độ dài các đường kính là một số chia hết cho 5.

Lời giải

1. Giả sử cạnh của 9 hình vuông lần lượt là $x; x+1; x+2; \dots; x+8$ (với $x \in \mathbb{N}^*$).

$$\text{Ta có: } S = x^2 + (x+1)^2 + \dots + (x+8)^2 = 9x^2 + 72x + 204.$$

Giả sử tồn tại hình vuông có cạnh bằng y , với $y \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Theo giả thiết ta có: } y^2 = 9x^2 + 72x + 204 \Leftrightarrow y^2 = 3(3x^2 + 24x + 68) \quad (*)$$

Do $VP_{(*)} : 3$ nên $y^2 : 3$, mà 3 là số nguyên tố nên $y : 3$.

Khi đó $y^2 : 9$ hay $VT_{(*)} : 9$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} 9x^2 : 9 \\ 72x : 9 \Rightarrow VP_{(*)} \not: 9. \Rightarrow \text{Không tồn tại } y. \\ 204 \not: 9 \end{cases}$$

Vậy không tồn tại hay không một hình vuông có cạnh là một số nguyên dương và có diện tích bằng S .

2.

Cách 1

- Gọi độ dài đường kính 17 đường tròn đó lần lượt là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{17}$ ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_{17} \in \mathbb{N}$)

Yêu cầu bài toán trở thành: Chứng minh luôn chọn được 5 số từ 17 số trên có tổng chia hết cho 5

Chia 17 số trên cho 5, ta được 17 số dư, mà một số chia 5 có thể dư 0, 1, 2, 3, 4 nên theo nguyên lý Dirichlet, có ít nhất 4 số có cùng số dư, rõ ràng nếu nhiều hơn 4 thì tổng của 5 số sẽ chia hết cho 5, ta xét trường hợp có 4 số có cùng số dư, không mất tính tổng quát, ta giả sử là a_1, a_2, a_3, a_4 và gọi số dư đó là b_1 với $b_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

- Xét 13 số còn lại, nếu có ít nhất một số chia 5 dư b_1 thì tổng của số đó với 4 số chia 5 dư b_1 trên sẽ chia hết cho 5, ta xét trường hợp 13 số trên chia 5 có 4 số dư (là 5 số từ 0 tới 4 trừ đi b_1), theo Dirichlet thì sẽ có ít nhất 4 số có cùng số dư, ta giả sử là a_5, a_6, a_7, a_8 và số dư đó là b_2

- Xét 9 số từ a_9 tới a_{17} , nếu có một số nào đó chia 5 dư b_2 thì ta có tổng 5 số gồm số đó với 4 số a_5, a_6, a_7, a_8 chia hết cho 5. Ta xét trường hợp 9 số này chia 5 có thể dư 3 số dư (từ 0 tới 4 trừ b_1 , trừ b_2). Theo Dirichlet thì có 3 số sẽ có cùng số dư, ta giả sử là a_9, a_{10}, a_{11} và số dư đó là b_3 .

TH1: a_{12} chia 5 cũng dư b_3 . Khi đó xét 5 số từ a_{13} tới a_{17} nếu có 1 số nào đó chia 5 dư b_3 thì rõ ràng ta có 5 số $a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ và số đó có tổng chia hết cho 5.

Xét trường hợp 5 số a_{13} tới a_{17} chia 5 có thể dư 2 số dư (từ 0 tới 4 trừ b_1 , trừ b_2 , trừ b_3), theo Dirichlet sẽ có 3 số có cùng số dư, giả sử 2 số này là a_{13}, a_{14}, a_{15} và số dư đó là b_4 . Nếu trong 2

số a_{16} và a_{17} có một số dư khác b_4 , giả sử là a_{16} thì rõ ràng ta có 5 số là a_1, a_5, a_{13}, a_{16} có 5 số dư đôi một khác nhau nên tổng của nó sẽ chia hết cho 5. Còn trong trường hợp 2 số có cùng số dư là b_4 thì rõ ràng 5 số $a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}$ có tổng chia hết cho 5

TH2: a_{12} chia 5 có số dư khác b_3 , ta gọi số dư đó là b_4 khi đó 5 số từ a_{13} tới a_{17} nếu có một số nào chia 5 khác b_4 , giả sử là a_{13} khi đó ta có 5 số là $a_1, a_5, a_9, a_{12}, a_{13}$ có 5 số dư đôi một khác nhau nên tổng của chúng sẽ chia hết cho 5. Còn trong trường hợp 5 số đó chia 5 có cùng số dư thì hiển nhiên tổng của chúng chia hết cho 5. Vậy bài toán được chứng minh hoàn toàn

Cách 2

Gọi độ dài đường kính 17 đường tròn đó lần lượt là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{17}$ ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_{17} \in \mathbb{N}$)

Chia 17 số trên thành các tập A_i trong đó A_i là tập các số chia 5 dư i ($i = 0, 4$). Nếu có 1 tập nào đó chứa nhiều hơn 5 số thì tổng 5 số đó chia hết cho 5. Còn nếu mọi tập đều chứa ít hơn 5 phần tử, xét 4 tập bất kì, khi đó tổng số phần tử 4 tập này không quá 16 phần tử, do đó có ít nhất 1 phần tử thuộc vào tập còn lại,

Vậy ta có 5 phần tử thuộc 5 tập khác nhau nên tổng 5 số này chia hết cho 5

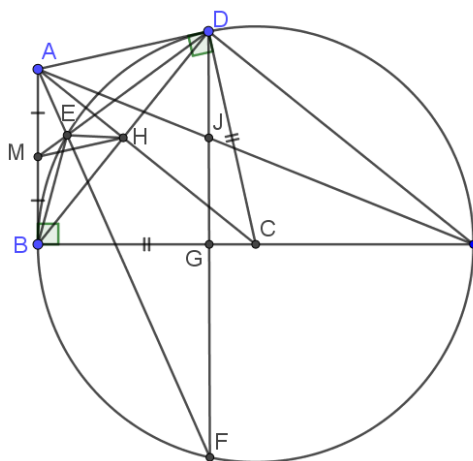
Câu 4. (3,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ, BC = CD$. Gọi M là trung điểm của AB , đường tròn tâm C bán kính BC (ký hiệu là đường tròn (C)) cắt MD tại E ($E \neq D$), H là giao điểm của AC và BD .

a) Chứng minh rằng $\triangle MEB \cong \triangle MBD$ và tứ giác $BHEM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi F là giao điểm của AE và đường tròn (C) ($F \neq E$). Chứng minh rằng $BC \perp DF$.

c) Gọi I là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn (C) ($I \neq B$), J là giao điểm của AI và DF . Tính tỉ số $\frac{DJ}{DF}$.

Lời giải



a) Vì $CB = CD$ nên $D \in (C)$ và $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$ suy ra AD, AB là tiếp tuyến của (C) .

Ta có: $\angle MBE + \angle EBD + \angle DBC = 90^\circ$, $\angle MDB + \angle ADE + \angle BDC = 90^\circ$, $\angle EBD = \angle ADE$ (cùng chắn ED), $\angle DBC = \angle BDC$ ($\triangle CBD$ cân tại C). Suy ra: $\angle MBE = \angle MDB$.

Xét $\triangle MEB$ và $\triangle MBD$ ta có: M chung, $\angle MBE = \angle MDB$ (cmt). Suy ra: $\triangle MEB \cong \triangle MBD$ (g.g)

Suy ra: $\angle MEB = \angle MBD$ (1) (2 góc tương ứng).

Dễ thấy: $\triangle AHB$ vuông tại H có đường trung tuyến $MH = MB = MA = \frac{AB}{2}$.

Suy ra: $\triangle MHB$ cân tại $M \Rightarrow MBH = MHB$. (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow MHB = MEB$. Vậy tứ giác $BHEM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có: $\triangle MEB \sim \triangle MBD$ (cmt) $\Rightarrow \frac{ME}{MB} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow \frac{ME}{MA} = \frac{MA}{MD}$ (vì $MA = MB$).

Xét $\triangle MEA$ và $\triangle MAD$ có: M chung, $\frac{ME}{MA} = \frac{MA}{MD}$ (cmt). Suy ra: $\triangle MEA \sim \triangle MAD$ (g.g)

Suy ra: $MAE = MDA$. Lại có: $MDA = EFD$ (cùng chắn cung ED).

Suy ra: $MAE = EFD$. Mà chúng là hai góc so le trong $\Rightarrow AB \parallel DE$.

Mặt khác $AB \perp BC$ suy ra: $BC \perp DF$ (đpcm).

c) Gọi G là giao điểm của BI và DF . Xét $\triangle DGB$ vuông tại G và $\triangle BHA$ vuông tại H có:
 $ABH = BDG$ (so le trong, $AB \parallel DG$). Suy ra: $\triangle DGB \sim \triangle BHA$ (g.g).

Suy ra:

$$\frac{DG}{BH} = \frac{DB}{BA} \Rightarrow DG \cdot BA = DB \cdot BH. \text{ Suy ra:}$$

$$\frac{DG}{BA} = \frac{DB \cdot BH}{BA^2} = \frac{DB}{BA} \cdot \frac{BH}{BA} = 2 \frac{BH}{BA} \cdot \frac{BH}{BA} = 2 \left(\frac{BH}{BA} \right)^2 = 2 \sin^2 BAH. (3)$$

$$\text{Lại có: } JG \parallel AB \Rightarrow \frac{JG}{AB} = \frac{IG}{IB} = \frac{IG \cdot IB}{IB^2} = \frac{ID^2}{IB^2} = \left(\frac{ID}{IB} \right)^2 = \sin^2 DBI. (4)$$

$$\text{Dễ thấy: } DBI = DAC = BAH. (5)$$

$$\text{Từ (3), (4), (5) suy ra: } \frac{DG}{BA} = 2 \frac{JG}{AB} \Leftrightarrow DG = 2JG \Leftrightarrow \frac{JG}{DG} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DJ}{DG} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Mà } DG = \frac{1}{2} DF. \text{ Vậy } \frac{DJ}{DF} = \frac{1}{4}.$$

Câu 6. (1,0 điểm) Cho các số thực x, y, z, t thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = xy + xz + xt + yz + yt + 3zt$.

Lời giải

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$xz = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}z \leq \frac{\sqrt{5}+1}{4} \left[x^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 z^2 \right] = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \left[x^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} z^2 \right]$$

$$\text{Tương tự } xt \leq \frac{\sqrt{5}+1}{4} \left[x^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} t^2 \right]$$

$$yz \leq \frac{\sqrt{5}+1}{4} \left[y^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} z^2 \right]$$

$$yt \leq \frac{\sqrt{5}+1}{4} \left[y^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} t^2 \right]$$

$$zt \leq \frac{1}{2}(z^2 + t^2) \Leftrightarrow 3zt \leq \frac{3}{2}(z^2 + t^2)$$

$$\text{Suy ra } A \leq \frac{\sqrt{5}+2}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = \frac{\sqrt{5}+2}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} x = y \\ x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}z \\ x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}t \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{20}} \\ z = t = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{20}} \end{cases}.$$