

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Giải phương trình: $2x\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3 = 3x^2 + x.$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + x^2 + y^2 - x^2y - xy - y = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y-1} = \sqrt{2y-3x-4} \end{cases}.$$

Câu 2. (1,5 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y và số nguyên tố p thỏa mãn $p^x - y^4 = 4.$

b) Chứng minh rằng nếu m, n là hai số tự nhiên thỏa mãn $2m^2 + m = 3n^2 + n$ thì $2m + 2n + 1$ là số chính phương.

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{a+b}{c+ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}.$$

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H .

a) Chứng minh BC là đường phân giác của tam giác DEF .

b) Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF với đường tròn (O) sao cho M nằm trên cung nhỏ $\widehat{AB}$. O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và CEM . Chứng minh rằng AM vuông góc với O_1O_2 .

c) Lấy điểm K trên đoạn thẳng HC sao cho K khác H và C . Đường thẳng BK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I và đường thẳng CI cắt đường thẳng BE tại điểm G . Chứng minh hệ thức:

$$S_{\triangle GFB} = \left(\frac{FK}{FC} + \frac{BF \cdot BE}{CF \cdot CE}\right) S_{\triangle CEF}.$$

Trong đó $S_{\triangle XYZ}$ là diện tích của tam giác XYZ .

Câu 5. (1,0 điểm)

Trong hình chữ nhật có chiều dài 149 cm, chiều rộng 40 cm cho 2020 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2 điểm trong số 2020 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2 cm.

-----HẾT-----

LỜI GIẢI CHI TIẾT VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN NĂM 2020 TỈNH NGHỆ AN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU
THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH

Câu 1.

a) Điều kiện $x \neq 0$. Chú ý rằng $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \neq 0$, ta có phương trình tương đương:

$$\begin{aligned}2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 &= 0 \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x} + 1\right)\left[2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5\right] &= 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{1}{2}; x = 2$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ 2y - 3x - 4 \geq 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương:

$$y^2 - (x^2 + x + 1)y + x^2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (y - x^2)(y - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{cases}.$$

- Với $y = x + 1$, $2y - 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x + 1) - 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$, điều này mâu thuẫn với $x \geq 0$.
- Với $y = x^2 \Rightarrow x \geq 1$. Thay $y = x^2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1} &= \sqrt{2x^2 - 3x - 4} \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x(x^2 - 1)} + x^2 - 1 = 2x^2 - 3x - 4 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x^2 - 1)} &= x^2 - 4x - 3 \\ \Leftrightarrow (x^2 - x) - 2\sqrt{(x^2 - x)(x + 1)} - 3(x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - x} - 3\sqrt{x + 1})(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x + 1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x} - 3\sqrt{x + 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x - 9 &= 0 \Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{34} \quad (x \geq 1).\end{aligned}$$

Với $x = 5 + \sqrt{34}$, ta có $y = 59 + 10\sqrt{34}$.

Vậy hệ cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (5 + \sqrt{34}; 59 + 10\sqrt{34})$.

Câu 2.

a) Với $y = 1$, ta có: $p^x = 5 \Rightarrow p = 5, x = 1$.

Với $y = 2$, ta có: $p^x = 20 \Rightarrow$ không tồn tại x, p thỏa mãn.

Với $y = 3$, ta có: $p^x = 85 \Rightarrow$ không tồn tại x, p thỏa mãn.

Với $y = 4$, ta có: $p^x = 260 \Rightarrow$ không tồn tại x, p thỏa mãn.

Với $y = 5$, ta có: $p^x = 629 \Rightarrow$ không tồn tại x, p thỏa mãn.

Xét $y \geq 6$, ta có: $y^4 + 4 = y^4 + 4y^4 + 4y^2 + 4 - 4y^2 = (y^2 + 2)^2 - 4y^2 = (y^2 + 2y + 2)(y^2 - 2y + 2)$.

Do đó $p^x - y^4 = 4 \Leftrightarrow p^x = (y^2 + 2y + 2)(y^2 - 2y + 2) \Rightarrow \begin{cases} y^2 + 2y + 2 = p^a \\ y^2 - 2y + 2 = p^b \end{cases}$ với $a + b = x$ và $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $y \geq 6 \Rightarrow 2(y^2 - 2y + 2) > y^2 + 2y + 2$.

Suy ra: $p^b = y^2 - 2y + 2 < p^a = y^2 + 2y + 2 < 2(y^2 - 2y + 2) \leq p(y^2 - 2y + 2) = p \cdot p^b = p^{b+1}$.

Do đó: $p^b < p^a < p^{b+1}$ hay $b < a < b + 1$. Suy ra không tồn tại a, b thỏa mãn.

Vậy $(x; y; p) = (1; 1; 5)$ là bộ số duy nhất thỏa mãn.

b) Ta có: $2m^2 + m = 3n^2 + n \Leftrightarrow 2(m^2 - n^2) + (m - n) = n^2 \Leftrightarrow (2m + 2n + 1)(m - n) = n^2$.

Nếu $n = 0$ thì $m = 0$ khi đó $2m + 2n + 1 = 1^2$ là số chính phương.

Nếu $n > 0$, gọi $d = \gcd(2m + 2n + 1, m - n)$ với $d \in \mathbb{N}^*$, suy ra $n^2 : d^2 \Rightarrow n : d$.

Ta có: $m = (m - n) + n : d \Rightarrow m : d$. Lại có $1 = (2m + 2n + 1) - 2(m + 1) : d$. Suy ra $d = 1$.

Do đó $(2m + 2n + 1)(m - n) = n^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2n + 1 = a^2 \\ m - n = b^2 \end{cases}$ với $ab = n$ và $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó dẫn đến $2m + 2n + 1$ là một số chính phương.

Câu 3.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$P = \sum \sqrt{\frac{a+b}{c+ab}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}} \sqrt{\frac{b+c}{a+bc}} \sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}} = 3\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)}} = 3\sqrt[6]{Q},$$

Trong đó $Q = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta được:

$$(c+ab)(a+bc) \leq \frac{(c+ab+a+bc)^2}{4} = \frac{[b(a+c)+(a+c)]^2}{4} = \frac{(a+c)^2(b+1)^2}{4}.$$

Viết hai bất đẳng thức tương tự ta có:

$$(a+bc)(b+ca) \leq \frac{(a+b)^2(c+1)^2}{4}$$

$$(c+ab)(b+ca) \leq \frac{(b+c)^2(a+1)^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra: } (c+ab)(a+bc)(c+ab) \leq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)(a+1)(b+1)(c+1)}{8}.$$

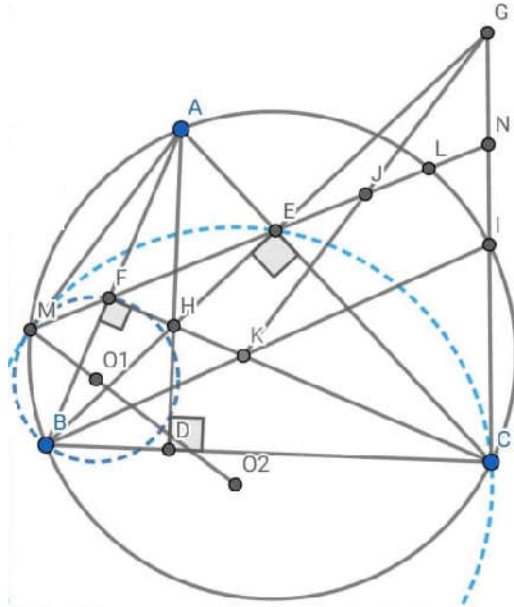
$$\text{Mà } (a+1)(b+1)(c+1) \leq \frac{(a+b+c+1+1+1)^3}{27} = \frac{(a+b+c+3)^3}{27} = \frac{6^3}{27} = 8.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } (c+ab)(a+bc)(c+ab) \leq (a+b)(b+c)(c+a) \Rightarrow Q \geq 1.$$

Dẫn đến $P \geq 3\sqrt[3]{Q} \geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3 đạt được khi $a = b = c = 1$.

Câu 4.



a) Tứ giác $BFHD$ nội tiếp nên $\widehat{HBF} = \widehat{HDF}$. Tứ giác $ABDE$ nội tiếp nên $\widehat{ABE} = \widehat{ADE}$.

Suy ra $\widehat{HDF} = \widehat{ADE}$ hay DA là phân giác của $\widehat{EDF}$.

Mà $DA \perp BC$ nên BC là phân giác ngoài của $\widehat{EDF}$.

b) Gọi L là giao điểm của ME với (O) .

$$\text{Ta có: } \widehat{AEM} = \frac{1}{2}(\widehat{sdAM} + \widehat{sdCL}) = \widehat{BAC} = \frac{1}{2}(\widehat{sdAL} + \widehat{sdCL}) \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{AL}.$$

Khi đó $\widehat{AML} = \widehat{ABM} = \widehat{ACM}$.

Xét đường tròn (O_1) có $\widehat{AMF} = \widehat{MBF}$. Suy ra MA là tiếp tuyến của (O_1) . Suy ra $MA \perp MO_1$ tại M .

Tương tự ta cũng có $\widehat{AME} = \widehat{MCE}$ nên MA cũng là tiếp tuyến của (O_2) . Suy ra $MA \perp MO_2$ tại M .

Do đó $MA \perp O_1O_2$.

c) Gọi J là giao điểm của KG và FE , N là giao điểm của KC và FE .

Ta có:

$$S_{\Delta GFB} = \left(\frac{FK}{FC} + \frac{BF \cdot BE}{CF \cdot CE} \right) S_{\Delta CEF} = \left(\frac{FK}{FC} + \frac{BF \cdot BE \cdot \sin \widehat{EBF}}{CF \cdot CE \cdot \sin \widehat{ECF}} \right) S_{\Delta CEF} = \left(\frac{FK}{FC} + \frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta CEF}} \right) S_{\Delta CEF} = \frac{FK}{FC} \cdot S_{\Delta CEF} + S_{\Delta BEF}$$

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với chứng minh:

$$\begin{aligned} S_{\Delta GFB} &= \frac{FK}{FC} \cdot S_{\Delta CEF} + S_{\Delta BEF} \Leftrightarrow S_{\Delta GEF} + S_{\Delta BEF} = \frac{FK}{FC} \cdot S_{\Delta CEF} + S_{\Delta BEF} \\ \Leftrightarrow S_{\Delta GEF} + S_{\Delta BEF} &= \frac{FK}{FC} \cdot S_{\Delta CEF} + S_{\Delta BEF} \Leftrightarrow S_{\Delta GEF} = \frac{FK}{FC} \cdot S_{\Delta CEF} \\ \Leftrightarrow \frac{FK}{FC} &= \frac{S_{\Delta GEF}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{\frac{1}{2} d(F, GC) \cdot GN}{\frac{1}{2} d(F, GC) \cdot CN} = \frac{GN}{CN}. \end{aligned}$$

Tóm lại cần chứng minh $\frac{FK}{FC} = \frac{GN}{CN}$ (*).

Thật vậy, ta có: $\frac{FH}{FK} = \frac{\tan \widehat{FBH}}{\tan \widehat{FBK}} = \frac{\tan \widehat{ECH}}{\tan \widehat{ECG}} = \frac{EH}{EG}$ do $\begin{cases} \widehat{EBF} = \widehat{ECF} \\ \widehat{ABI} = \widehat{ACI} \end{cases}$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác GHK , có cát tuyến FEJ , ta có:

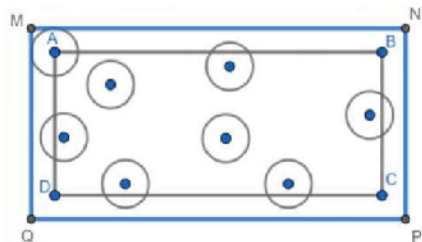
$$\frac{KF}{FH} \cdot \frac{HE}{GE} \cdot \frac{GJ}{JK} = 1 \Rightarrow \frac{GJ}{JK} = 1.$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác GCK , có cát tuyến FJN , ta có:

$$\frac{GN}{NC} \cdot \frac{CF}{FK} \cdot \frac{JK}{GJ} = 1 \Rightarrow \frac{GN}{CN} = \frac{FK}{FC}.$$

Từ đó suy ra (*) đúng dẫn đến ta có điều phải chứng minh.

Câu 5.



Giả sử ngược lại không tồn tại điểm nào có khoảng cách nhỏ hơn 2 cm trong 2020 điểm đã cho. Khi đó khoảng cách giữa hai điểm luôn lớn hơn hoặc bằng 2 cm .

Xét 2020 hình tròn có tâm là các điểm đã cho có bán kính bằng 1 cm . Do 2020 điểm này nằm trong hình chữ nhật nên 2020 đường tròn này nằm trong hình chữ nhật được mở rộng từ hình chữ nhật đã cho 1 cm về cả chiều dài và chiều rộng. Khi đó kích thước hình chữ nhật mới là $(149 + 2 \cdot 1) \times (40 + 2 \cdot 1) = 151 \times 42 = 6242\text{ cm}^2$.

Do khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ không nhỏ hơn 2 cm nên các đường tròn này chỉ có thể có nhiều nhất một điểm chung, nghĩa là tổng diện tích của 2020 hình tròn bằng tổng diện tích từng hình tròn. Mặt khác các hình tròn nằm trọn trong hình chữ nhật mới nên suy ra diện tích của 2020 hình tròn phải nhỏ hơn diện tích của hình chữ nhật mới.

Ta có diện tích của 2020 hình tròn là $2020\pi \cdot 1^2 = 6242,8\text{ cm}^2 > 6242$ ($\pi = 3,14$). Điều này chứng tỏ diện tích hình chữ nhật nhỏ hơn tổng diện tích các hình tròn. Do đó điều giả sử là sai.

Vậy ta có điều phải chứng minh.