

Câu 1 (3,0 điểm).

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 = y + \frac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \frac{1}{x} \end{cases}$$

Câu 2 (3,0 điểm).

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số sau đây trên $\mathbb{R}$

$$y = |1 + 2 \cos x| + |1 + 2 \sin x|$$

Câu 3 (5,0 điểm).

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 0; u_2 = 2; u_n = 6u_{n-1} - 8u_{n-2}, n \geq 3$

a. Xác định số hạng tổng quát của dãy (u_n) .

b. Gọi (v_n) là dãy số sau cho $v_1 = 1; v_n = u_n \cdot v_{n-1}; \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Chứng minh rằng v_n luôn luôn là bội của n với mọi n .

Câu 4 (4,0 điểm).

Cho đa thức $P(x) = x^n + 4, n \in \mathbb{N}$.

a. Với $n = 4$ hãy phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các đa thức với các hệ số là số nguyên.

b. Tìm tất cả các giá trị n nguyên dương sao cho đa thức $P(x)$ phân tích được thành tích của hai đa thức khác hằng số với hệ số là các số nguyên.

Câu 5 (5,0 điểm).

Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 + f(y)) = y + [f(x)]^2; \forall x; y \in \mathbb{R} (*)$$

a. Tính $f(0)$.

b. Tìm tất cả các hàm số f thỏa điều kiện $(*)$.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay

Họ và tên thí sinh.; Số báo danh.

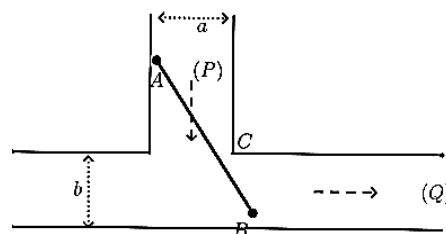
Câu 6 (5,0 điểm).

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^5 + y^5 + z^5 = -32 \end{cases}$$

Câu 7 (5,0 điểm).

Hai kênh dẫn nước (P) và (Q) vuông góc nhau (như hình vẽ) chiều rộng của hai kênh lần lượt là a và b . Một thanh gỗ AB có tiết diện không đáng kể nổi trên mặt nước và trôi từ kênh (P) sang kênh (Q). Tìm độ dài lớn nhất của thanh gỗ AB sao cho thanh gỗ trôi qua được từ kênh (P) sang kênh (Q).



Câu 8 (5,0 điểm).

Tính theo n số các điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy có tọa độ $(x; y)$ với $x; y$ đều là số nguyên thỏa mãn $|x| + |y| \leq n$ với n là số tự nhiên cho trước.

Câu 9 (5,0 điểm).

Cho lục giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ có diện tích bằng 1 và có các cặp cạnh đối diện song song, hai đường thẳng $A_6A_1; A_2A_3$ cắt nhau tại các điểm B_1 , hai đường thẳng $A_1A_2; A_3A_4$ cắt nhau tại điểm B_2 ; ...; tương tự $A_{i-1}A_i; A_{i+1}A_{i+2}$ cắt nhau tại điểm B_i , $i = 1 \dots 6$ (xem A_7 là A_1 và A_8 là A_2). Chứng minh rằng tổng diện tích sáu tam giác $A_iB_iA_{i+1}$; $i = 1 \dots 6$ không bé hơn 1.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay

Họ và tên thí sinh.; Số báo danh.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI
AN GIANG**

CẤP QUỐC GIA
Khóa ngày 19/08/2023
ĐÁP ÁN MÔN TOÁN

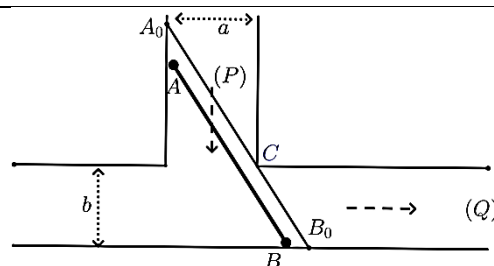
Câu	Lược giải	Điểm
Câu 1	$\begin{cases} 2x^2 = y + \frac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \frac{1}{x} \end{cases}; \text{ĐK } x; y \neq 0$ Ta có nhận xét: $y + \frac{1}{y} = 2x^2 \geq 0 \Rightarrow y > 0$, tương tự $x > 0$. Áp dụng BĐT AM -GM ta được $2x^2 = y + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{1}{y}} = 2 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \quad (1)$ Tương tự $y \geq 1$. Ta chứng minh hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 1$ Giả sử rằng $0 < x \leq y$ $x + \frac{1}{x} = 2y^2 \geq 2x^2 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 1 \leq 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \quad (2)$ Từ (1) và (2) ta được $x = 1 \Rightarrow y = 1$. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1; 1)$.	3,0 đ
Câu 2	$y = 1 + 2 \cos x + 1 + 2 \sin x $ xét hàm $f(x) = (1 + 2 \cos x + 1 + 2 \sin x)^2$ $= 6 + 4(\cos x + \sin x) + 2 1 + 2 \cos x 1 + 2 \sin x $ $= 6 + 4(\cos x + \sin x) + 2 1 + 2(\cos x + \sin x) + 4 \cos x \sin x $ đặt $t = \cos x + \sin x; t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]; g(t) = 6 + 4t + 2 2t^2 + 2t - 1 , g(t)$ liên tục trên $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ $2t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2}; t_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ $g'(t) = \begin{cases} 8t + 8 & \text{khi } t < t_2; t > t_1 \\ -8t & \text{khi } t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0;$ Ta có $g(0) = 8$ $g(-\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} + 2 3 - 2\sqrt{2} = 12 - 8\sqrt{2} = 4(\sqrt{2} - 1)^2$ $g(\sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2} + 2 3 + 2\sqrt{2} = 12 + 8\sqrt{2} = 4(\sqrt{2} + 1)^2$ $g\left(-\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) = 6 - 2(\sqrt{3} + 1) = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ $g\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) = 6 + 2(\sqrt{3} - 1) = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ vậy $\max g = 4(\sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow \max y = 2(\sqrt{2} + 1)$ khi $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ $\min g = (\sqrt{3} - 1)^2 \Rightarrow \min y = (\sqrt{3} - 1)$ khi $\cos x + \sin x = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.	3,0 đ

	a. $u_n = 6u_{n-1} - 8u_{n-2} \Leftrightarrow u_n - 6u_{n-1} + 8u_{n-2} = 0$ Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\lambda = 4; \lambda = 2$. khi đó $u_n = A2^n + B4^n$, do $u_1 = 0; u_2 = 2$; ta được $\begin{cases} 0 = 2A + 4B \\ 2 = 4A + 16B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2A + 4B \\ 1 = 2A + 8B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$ vậy $u_n = 4^{n-1} - 2^{n-1}$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.	2,0 đ
Câu 3	b. ta có $v_1 = 1; v_2 = u_2v_1 = 2; v_3 = u_3v_2 = 24$ $v_n = u_nv_{n-1} = (4^{n-1} - 2^{n-1})v_{n-1}$ $v_n = (4^{n-1} - 2^{n-1})(4^{n-2} - 2^{n-2}) \dots (4 - 2)$ ta nhận xét v_n chứa $(n - 1)$ các tích số dạng $4^s - 2^s$. Nếu n là số nguyên tố khi đó $4^{n-1} = 2^{n-1} \bmod (n)$ như vậy $(4^{n-1} - 2^{n-1}) = 0 \bmod (n)$ $\Rightarrow n v_n$ Nếu n không là số nguyên tố gọi p là ước của n, theo trên ta cũng có mọi số nguyên tố $p < n$, $4^{p-1} = 2^{p-1} \bmod (p)$, do đó p chia hết $(4^{p-1} - 2^{p-1})$, thành phần này có mặt trong tích của v_n. Hay n chia hết v_n.	3,0đ
	$\begin{aligned} n = 4 &\Rightarrow P(x) = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x) \\ &\Rightarrow x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$ Do hai tam thức bậc hai $x^2 + 2x + 2; x^2 - 2x + 2$ đều vô nghiệm nên cách phân tích trên là duy nhất.	1,0 đ
Câu 4	Nhận xét với $n = 2; P(x) = x^2 + 4$ không có nghiệm nên không phân tích được thành tích hai nhị thức bậc nhất. Với $n > 2$ và n chẵn do $P(x) > 0, \forall x \in R$ và hệ số cao nhất của $P(x)$ bằng 1, nên $P(x)$ chỉ có thể phân tích được thành tích các tam thức bậc hai vô nghiệm. Giả sử $P_1(x) = x^2 + ax + b; P_2(x) = x^2 + cx + d; a, b, c, d \in Z; P_i(x) > 0$ Ta có $P(1) = 5 = P_1(1).P_2(1) \dots P_k(1); P(-1) = 5 = P_1(-1).P_2(-1) \dots P_k(-1)$ Do $a, b, c, d \in Z \Rightarrow P_i(\pm 1) \in Z \Rightarrow P_1(\pm 1)$ và $P_2(\pm 1)$ nhận một trong hai giá trị 1; 5 Trường hợp $P_1(1) = 1; P_1(-1) = 1$ $\Rightarrow \begin{cases} 1 + a + b = 1 \\ 1 - a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ Ta được $\Rightarrow P_1(x) = x^2$ nhưng vì $P_1(x)$ vô nghiệm nên không xảy ra Trường hợp $P_1(1) = 1; P_1(-1) = 5 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow P_1(x) = x^2 - 2x + 2$ Trường hợp $P_1(1) = 5; P_1(-1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ -a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow P_1(x) = x^2 + 2x + 2$ Vậy $P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)P_i(x)$ Với $n = 4$ ta có $P(x) = x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ Nếu $n = 4k \Rightarrow P(x) = (x^k)^4 + 4 = (x^{2k} - 2x^k + 2)(x^{2k} + 2x^k + 2)$ Với $n > 2$ lẻ $x^n = -4 \Leftrightarrow x = -4^{\frac{1}{n}} = -2^{\frac{2}{n}}$. Do n lẻ nên để $P(x)$ phân tích được thành tích hai đa thức với hệ số nguyên thì $n = 2$ điều này không xảy ra.	3,0 đ

	Như vậy với $n = 4k + 1; n = 4k + 3$ do là số lẻ nên đa thức không phân tích được thành tích hai đa thức với hệ số nguyên. Ta còn xét $n = 4k + 2$, ta chứng minh đa thức không phân tích được. Thật vậy Giả sử rằng $x^{4k+2} + 4$ phân tích được thành tích hai đa thức với hệ số nguyên, khi đó theo lập luận ở trên $x^{4k+2} + 4$ chia hết cho $x^2 + 2x + 2$ và $x^2 - 2x + 2$ hay $x^{4k+2} + 4$ chia hết cho $x^4 + 4$. Điều này không xảy ra do $x^{4k+2} + 4 = x^{4k+2} + 4x^2 - 4x^2 + 4 = x^2(x^{4k} + 4) - 4x^2 + 4$ $x^{4k} + 4$ chia hết cho $x^4 + 4$, tuy nhiên $-4x^2 + 4$ không chia hết cho $x^4 + 4$. Vậy với $n = 4k \Rightarrow P(x) = (x^{2k} - 2x^k + 2)(x^{2k} + 2x^k + 2)$	
	$f(x^2 + f(y)) = y + [f(x)]^2 (*)$ Cho $x = y = 0 \Rightarrow f(f(0)) = 0 + [f(0)]^2$ Đặt $t = f(0) \Rightarrow f(t) = t^2$, (1) Cho $y = 0 \Rightarrow f(x^2 + t) = [f(x)]^2 \Rightarrow f(1 + t) = [f(1)]^2$ (2). Cho $x = 0; y = x \Rightarrow f(f(x)) = x + t^2$ (3) Xét $f(t^2 + [f(1)]^2)$ ta tính bằng hai cách, theo (*), (1) và (2) ta được $f(t^2 + [f(1)]^2) = f(t^2 + f(1 + t)) = 1 + t + [f(t)]^2 = 1 + t + t^4 \quad (4)$ mặt khác theo (*) (1) (2) và (3) $f(t^2 + [f(1)]^2) = f([f(1)]^2 + t^2) = f([f(1)]^2 + f(t))$ $= t + [f(f(1))]^2 = t + (1 + t^2)^2 = 1 + t + 2t^2 + t^4 \quad (5)$ từ (4) và (5) ta được $1 + t + t^4 = 1 + t + 2t^2 + t^4 \Leftrightarrow 2t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ vậy $f(0) = 0$.	2,0 đ
Câu 5	b. Với $f(0) = 0$, thay $x = 0; y = x \Rightarrow f(f(x)) = x, \forall x \in R$. Cho $y = 0 \Rightarrow f(x^2) = [f(x)]^2$. Với số thực bất kỳ y, đặt $z = f(y)$ từ (*) cho $x = 0$ ta được $f(0 + f(y)) = y + [f(0)]^2 \Leftrightarrow f(f(y)) = y \Rightarrow f(z) = y$ vậy nếu $z = f(y) \Rightarrow y = f(z)$ với mọi y và $f(x^2 + y) = f(x^2 + f(z)) = z + [f(x)]^2 = f(y) + [f(x)]^2$ với $x > 0$: chọn số z sao cho $x = z^2$ từ (*) ta có $f(x + y) = f(z^2 + f(z)) = z + [f(z)]^2 = f(y) + f(z^2) = f(y) + f(x)$ Hay $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x > 0; y \in R$ lại cho $y = -x$ ta được $f(x + -x) = f(0) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ Với $x < 0 \Rightarrow x = -z^2$ từ (*) ta có $f(x - y) = f(-z^2 - y) = -f(z^2 + y) = -[f(y) + [f(z)]^2] =$ $= -[f(y) + f(z^2)] = -[f(y) + f(-x)] = f(x) - f(y)$ như vậy $f(x - y) = f(x) - f(y)$ với mọi $x; y$ Theo Phương trình Cauchy ta được $f(x) = x; \forall x \geq R$.	3,0đ
Câu 6	$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^5 + y^5 + z^5 = -32 \end{cases}$ Đặt $p = x + y + z; q = xy + yz + xz; r = xyz$. Ta đi tính $p; q; r$. Ta có $2q = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 4 - 6 = -2 \Rightarrow q = -1, p = -2$ Đặt $S_n = x^n + y^n + z^n \Rightarrow S_0 = 3; S_1 = -2; S_2 = 6$ Áp dụng công thức cho đa thức đối xứng ba biến ta có $S_n - (x + y + z)S_{n-1} + (xy + yz + xz)S_{n-2} - xyzS_{n-3} = 0$ Cho $n = 3 \Rightarrow S_3 = pS_2 - qS_1 + rS_0 = -2(6) + 1(-2) + 3r = -14 + 3r$	5,0 đ

Cho $n = 4 \Rightarrow S_4 = pS_3 - qS_2 + rS_1 = (-2)(-14 + 3r) + 1 \cdot (6) + r(-2) = 34 - 8r$.
 Cho $n = 5 \Rightarrow S_5 = pS_4 - qS_3 + rS_2 = (-2)(34 - 8r) + (-14 + 3r) + r \cdot 6 = -82 + 25r$.
 $\Rightarrow -32 = -82 + 25r \Leftrightarrow r = 2$.
 $p = -2; q = -1; r = 2$.
 $x; y; z$ là ba nghiệm của phương trình
 $t^3 + 2t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1; t = -2$
 Vậy nghiệm của hệ là $(1; -1; -2)$ và các hoán vị của nó.

Gọi C là giao điểm của bờ hai kênh (P) và (Q). Giả sử thanh AB trôi được từ kênh (P) sang kênh (Q); từ C kẻ đoạn thẳng A_0B_0 song song AB cắt hai bờ của kênh (P) và kênh (Q) không chứa điểm C là $A_0; B_0$; khi đó $AB \leq A_0B_0$; như vậy ta tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn A_0B_0 luôn qua điểm C .



Xét hệ trục tọa độ Oxy qua hai bờ kênh (P); (Q) không chứa C , khi đó $C(a; b)$.
 Phương trình đường thẳng A_0B_0 : $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ ($m > a; n > b$).
 do đường thẳng A_0B_0 qua $C(a; b)$

$$\Rightarrow \frac{a}{m} + \frac{b}{n} = 1 \Rightarrow \frac{b}{n} = \frac{m-a}{m} \Rightarrow n = \frac{mb}{m-a}$$

Độ dài đoạn thẳng A_0B_0 là $\sqrt{m^2 + n^2}$;

Bài toán quy về tìm GTNN của hàm số $y = m^2 + n^2$ với điều kiện $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = 1$; ($m > a; n > b$)

Câu
7

$$y = m^2 + \frac{m^2 b^2}{(m-a)^2} \quad (m > a)$$

$$y' = 2m + \frac{2mb^2(m-a)^2 - 2(m-a)m^2b^2}{(m-a)^4} = 2m + \frac{2mb^2[(m-a) - m]}{(m-a)^3}$$

$$= 2m - \frac{2mab^2}{(m-a)^3} = \frac{2m((m-a)^3 - ab^2)}{(m-a)^3}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (loại)}; (m-a)^3 = ab^2 \Leftrightarrow m = a + \sqrt[3]{ab^2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{mb}{m-a} = \frac{(a + \sqrt[3]{ab^2})b}{\sqrt[3]{ab^2}} = \frac{ab}{\sqrt[3]{ab^2}} + b = b + \sqrt[3]{a^2b}$$

m	a	$a + \sqrt[3]{ab^2}$	$+\infty$
y'		- 0 +	
y		y_{CT}	

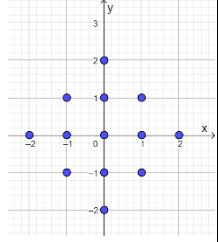
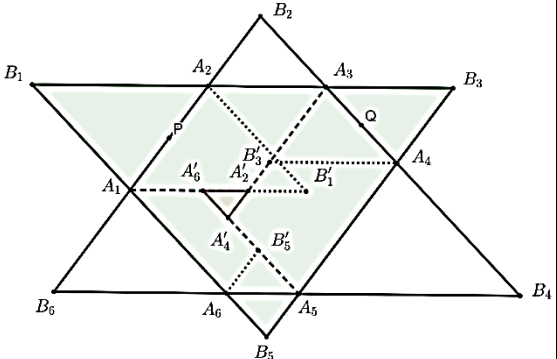
với $m = a + \sqrt[3]{ab^2}$; $n = b + \sqrt[3]{a^2b}$ ta tính được

$$y = \left(a + \sqrt[3]{ab^2}\right)^2 + \left(b + \sqrt[3]{a^2b}\right)^2$$

$$= a^2 + 2\sqrt[3]{a^4b^2} + \sqrt[3]{a^2b^4} + b^2 + 2\sqrt[3]{a^2b^4} + \sqrt[3]{a^4b^2}$$

$$= a^2 + 3\sqrt[3]{a^4b^2} + 3\sqrt[3]{a^2b^4} + b^2 = \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3$$

5,0đ

	Vậy giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{m^2 + n^2}$ là $A_0B_0 = (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^{\frac{3}{2}}$. Hay độ dài lớn nhất của thanh gỗ là $\max AB = (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^{\frac{3}{2}}$.	
Câu 8	Ta chứng minh bằng quy nạp số các điểm có tọa độ là các số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x + y \leq n$ là $n^2 + (n + 1)^2$ Thật vậy Với $n = 1$ ta có $n^2 + (n + 1)^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ điểm thỏa yêu cầu $x + y \leq 1$ có tâm $(0; 0); (1; 0); (0; 1); (-1; 0); (0; -1)$. Giải sử số điểm $(x; y)$ thỏa mãn $x + y \leq k$ là $k^2 + (k + 1)^2$ Ta chứng minh nó đúng với $n = k + 1$. Xét các điểm $(x; y)$ thỏa mãn $k < x + y \leq k + 1$ khi đó các điểm này nằm trên các cạnh một hình thoi có độ dài đường chéo bằng $2(k + 1)$, số các điểm nằm trên chu vi của hình thoi là $4(k + 1)$ như vậy số điểm $(x; y)$ thỏa mãn $x + y \leq k + 1$ là $k^2 + (k + 1)^2 + 4k + 4 = (k + 1)^2 + (k + 2)^2$ vậy số điểm $(x; y)$ thỏa điều kiện $x + y \leq n$ là $n^2 + (n + 1)^2$. 	5,0đ
Câu 9	Ta chứng minh $\sum_{i=1}^6 S_{A_i B_i A_{i+1}} \geq 1$ Gọi B'_i là điểm đối xứng B_i qua trung điểm của các đoạn $A_i A_{i+1}$. Khi đó $S_{A_i B_i A_{i+1}} = S_{A_i B'_i A_{i+1}}$ Ta chứng minh sáu tam giác $A_i B'_i A_{i+1}$; $i = 1 \dots 6$ bao ngoài lục giác đã cho. + Gọi $A'_2; A'_4; A'_6$ lần lượt là các điểm đối xứng của $A_2; A_4; A_6$ qua trung điểm của các đoạn thẳng $A_1 A_3; A_3 A_5; A_5 A_1$ Xét ba hình bình hành $A_{2i+1} A_{2i+2} A_{2i+3} A'_{2i+2}$ $i = 0, 1, 2$ (gồm $A_1 A_2 A_3 A'_2$; $A_3 A_4 A_5 A'_4$; $A_5 A_6 A_1 A'_6$). Mỗi hình bình hành đều được phủ bởi các cặp tam giác $A_{2i+1} A_{2i+2} B'_{2i+2}$ và $A_{2i+2} A_{2i+3} B'_{2i+2}$. Cụ thể hình bình hành $A_1 A_2 A_3 A'_2$ được phủ bởi hai tam giác $A_1 A_2 B'_1$ và $A_2 A_3 B'_2$. Tuy nhiên ba hình bình hành này chưa phủ hết lục giác đã cho, đó là tam giác $A'_2 A'_4 A'_6$. Ta cần chứng minh có ít nhất một tam giác trong các tam giác $A_{2i+1} A_{2i+2} B'_{2i+2}$ phủ tam giác $A'_2 A'_4 A'_6$. Xét tam giác $B_1 B_3 B_5$ và $A'_2 A'_4 A'_6$ Do $B'_1; B'_3; B'_5$ là các điểm đối xứng tương ứng của các điểm $B_1; B_3; B_5$ ta được $A_1 B'_1 = A_2 B_1; A_3 B'_3 = A_4 B_3; A_5 B'_5 = A_6 B_5$ $A_1 A'_6 = A_5 A_6; A_3 A'_2 = A_1 A_2; A_5 A'_4 = A_3 A_4$ Hai tam giác $A_5 B_5 A_6$; $A_2 A_1 B_1$ đồng dạng do các cặp cạnh đối song song $\Rightarrow \frac{A_2 B_1}{A_5 A_6} = \frac{A_1 A_2}{A_5 B_5}$ Hai tam giác $A_5 B_5 A_6$; $B_3 A_4 A_3$ đồng dạng do các cặp cạnh đối song song $\Rightarrow \frac{A_6 B_5}{A_3 A_4} = \frac{A_5 B_5}{A_4 B_3}$ 	5,0đ

Khi đó ta được $\Rightarrow \frac{A_1 B'_1}{A_1 A'_6} \cdot \frac{A_3 B'_3}{A_3 A'_2} \cdot \frac{A_5 B'_5}{A_5 A'_4} = \frac{A_2 B_1}{A_5 A_6} \cdot \frac{A_4 B_3}{A_1 A_2} \cdot \frac{A_6 B_5}{A_3 A_4} = \frac{A_1 A_2}{A_5 B_5} \cdot \frac{A_4 B_3}{A_1 A_2} \cdot \frac{A_5 B_5}{A_4 B_3} = 1$ Hay $\frac{A_1 B'_1}{A_1 A'_6} \cdot \frac{A_3 B'_3}{A_3 A'_2} \cdot \frac{A_5 B'_5}{A_5 A'_4} = 1$ Nếu cả ba tích số này đều bằng 1 khi đó lục giác đã cho có các cạnh bằng nhau nên tam giác $A'_2 A'_4 A'_6$ suy biến thành một điểm và diện tích sáu tam giác $A_i B'_i A_{i+1}$ phủ đúng lục giác và diện tích bằng 1. Nếu một trong ba tỉ số $\frac{A_1 B'_1}{A_1 A'_6}$; $\frac{A_3 B'_3}{A_3 A'_2}$; $\frac{A_5 B'_5}{A_5 A'_4}$ có ít nhất một tỉ số không bé hơn 1. giả sử rằng $\frac{A_1 B'_1}{A_1 A'_6} \geq 1 \Rightarrow A_1 B'_1 \geq A_1 A'_6$ Khi đó tam giác $A_1 B'_1 A_6$ phủ được tam giác $A'_2 A'_4 A'_6$. Như vậy sáu tam giác $A_i B'_i A_{i+1}$ phủ được lục giác đã cho $\sum_{i=1}^6 S_{A_i B'_i A_{i+1}} \geq 1$ Dấu bằng xảy ra khi lục giác đều.	
---	--

Chú ý:

- + Học sinh giải cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.
- + Điểm thành phần do tổ chấm thảo luận chi tiết đến 0,25 và không làm tròn