

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $T = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) \left(\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) (x > 0, x \neq 1)$

a) Rút gọn biểu thức T

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $3T - 2 = 0$

Câu 2. (1,0 điểm) Giải phương trình $\sqrt{2x-1} = 3-2x$

Câu 3. (1,0 điểm) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4dm, AB = 2AD$. Đường thẳng d vuông góc với AC tại C , đường thẳng d cắt hai đường thẳng AB, BD lần lượt tại E và I . Tính độ dài các đoạn thẳng BD, BE và ID

Câu 4. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = (m+1)x + 1$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) sao cho $|x_1| > |x_2|$

Câu 5. (1,0 điểm) Do ảnh hưởng của đại dịch COVID-19, trong một đợt kiểm tra thường xuyên môn Toán, giáo viên đã chia lớp thành 3 nhóm, mỗi học sinh chỉ được chọn 1 trong 3 nhóm :

Nhóm A: Kiểm tra trực tiếp tại lớp với hình thức tự luận

Nhóm B: Kiểm tra trực tuyến với hình thức trắc nghiệm

Nhóm C: Làm bài thu hoạch cá nhân theo chuyên đề đã học

Sau khi kiểm tra, điểm trung bình của các em học sinh được thống kê theo bảng sau:

Nhóm	A	B	C	A và B	B và C
Điểm TB	9,0	8,0	8,5	8,4	8,2

Biết nhóm A có 10 học sinh lựa chọn. Tính số học sinh và điểm trung bình của lớp trong đợt kiểm tra thường xuyên trên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 6. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy + 1 = 2x + y \\ \sqrt{3x+1} - 2\sqrt{1-y} = y \end{cases}$$

Câu 7. (3,0 điểm) Do tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CQ cắt nhau tại H (với $D \in BC, E \in AC, Q \in AB$). Gọi M là trung điểm BC, T là giao điểm của EQ với BC

a) Chứng minh $AEDB$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh tứ giác $EQDM$ nội tiếp và $TD.TM = TB.TC$

c) Chứng minh H là trực tâm của tam giác ATM

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $T = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) \left(\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) (x > 0, x \neq 1)$

c) Rút gọn biểu thức T

$$T = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) \left(\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) (x > 0, x \neq 1)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

d) Tìm tất cả các giá trị của x để $3T-2=0$

$$3T-2=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \cdot 3 = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}-3 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9(tm)$$

Vậy $x=9$ thì thỏa đề

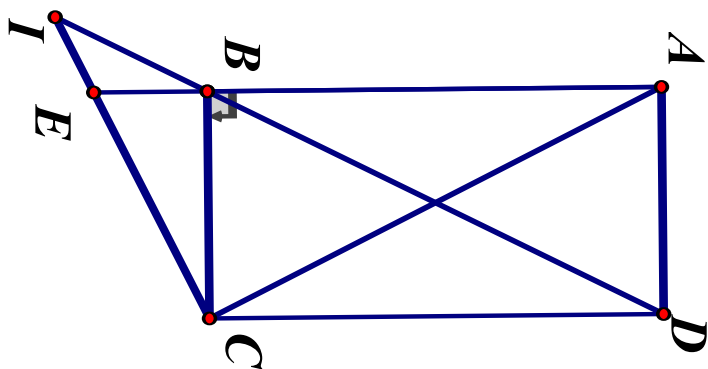
Câu 2. (1,0 điểm) Giải phương trình $\sqrt{2x-1} = 3-2x$

$$\sqrt{2x-1} = 3-2x \left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \right) \Rightarrow 2x-1 = (3-2x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 9-12x+4x^2 \Leftrightarrow 4x^2-14x+10=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(tm) \\ x=\frac{5}{2}(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

Câu 3. (1,0 điểm) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4dm, AB = 2AD$. Đường thẳng d vuông góc với AC tại C , đường thẳng d cắt hai đường thẳng AB, BD lần lượt tại E và I . Tính độ dài các đoạn thẳng BD, BE và ID



$$BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

$$\triangle ACE \text{ vuông tại } C \text{ nên ta có : } BC^2 = AB \cdot BE \Rightarrow BE = \frac{BC^2}{AB} = 1$$

$$BE // CD \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{BE}{CD} = \frac{1}{4} \Rightarrow IB = \frac{1}{4} ID \Rightarrow ID = \frac{4}{3} BD = \frac{8\sqrt{5}}{3}$$

Câu 4. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = (m+1)x + 1$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol

$(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) sao cho $|x_1| > |x_2|$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = (m+1)x + 1 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x - 1 = 0$$

Ta có $\Delta > 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m hay (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m

Theo hệ thức Vi-et ta có :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

Ta có $|x_1| > |x_2| \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 > 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > 0$

Vì $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow x_1 + x_2 < 0 \Leftrightarrow m < -1$

Câu 5. (1,0 điểm) Do ảnh hưởng của đại dịch COVID-19, trong một đợt kiểm tra thường xuyên môn Toán, giáo viên đã chia lớp thành 3 nhóm, mỗi học sinh chỉ được chọn 1 trong 3 nhóm :

Nhóm A: Kiểm tra trực tiếp tại lớp với hình thức tự luận

Nhóm B: Kiểm tra trực tuyến với hình thức trắc nghiệm

Nhóm C: Làm bài thu hoạch cá nhân theo chuyên đề đã học

Sau khi kiểm tra, điểm trung bình của các em học sinh được thống kê theo bảng sau:

Nhóm	A	B	C	A và B	B và C
Điểm TB	9,0	8,0	8,5	8,4	8,2

Biết nhóm A có 10 học sinh lựa chọn. Tính số học sinh và điểm trung bình của lớp trong đợt kiểm tra thường xuyên trên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Gọi x, y lần lượt là số học sinh của nhóm B, nhóm C ($x, y \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Ta có hệ phương trình : } \begin{cases} \frac{10 \cdot 9 + x \cdot 8}{10 + x} = 8,4 \\ \frac{8x + 8,5y}{x + y} = 8,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 90 + 8x = 84 + 8,4x \\ 8x + 8,5y = 8,2(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases} (tm)$$

Vậy lớp có 35 học sinh, điểm trung bình : 8,43

Câu 6. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy + 1 = 2x + y(1) \\ \sqrt{3x+1} - 2\sqrt{1-y} = y(2) \end{cases}$$

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ y \leq 1 \end{cases}$. Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 + y(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+y-1) = 0$$

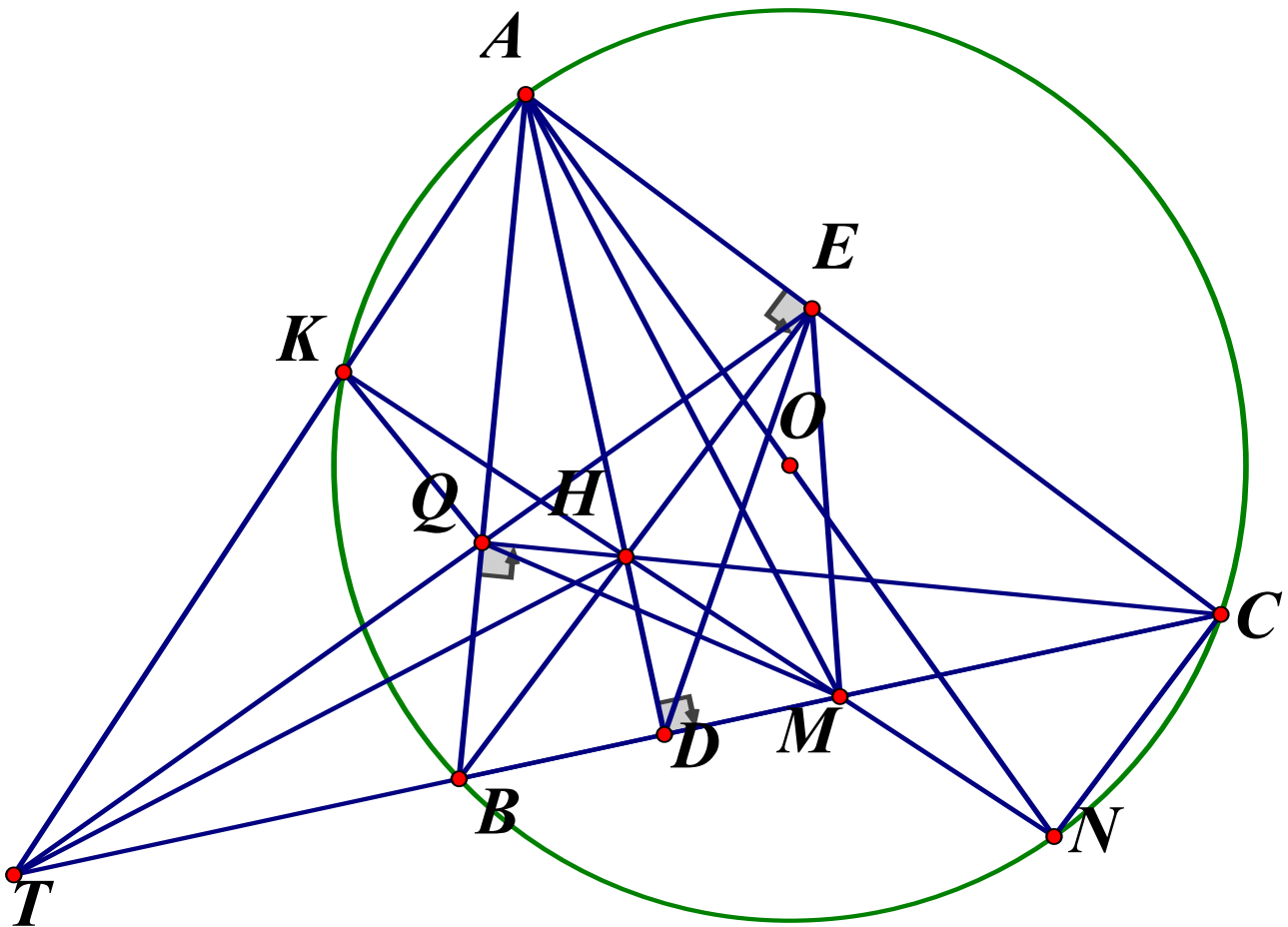
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow 2-2\sqrt{1-y}=y \Leftrightarrow y=0 \\ y=1-x \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-2\sqrt{x}=1-x (*) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - (\sqrt{x} + 1) = \sqrt{x} - x \Leftrightarrow \frac{2(x-\sqrt{x})}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x} + 1} + (x-\sqrt{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-\sqrt{x}) \left[\frac{1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x} + 1} + 1 \right] = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=1 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) = (1; 0), (0; 1)$

Câu 7. (3,0 điểm) Do tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (với $D \in BC, E \in AC, F \in AB$). Gọi M là trung điểm BC, T là giao điểm của EF với BC



d) Chứng minh $AEDB$ là tứ giác nội tiếp

Vì $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$, mà D, E là 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn AB

$\Rightarrow AEDB$ là tứ giác nội tiếp

e) Chứng minh tứ giác $EQDM$ nội tiếp và $TD.TM = TB.TC$

Vì tứ giác $QHDB, EQBC$ nội tiếp nên $\angle QDH = \angle QBH = \angle ECQ$

Hơn nữa, $HDCE$ nội tiếp nên $\angle HDE = \angle ECQ$

$\Rightarrow \angle QDE = 2\angle ECH = \angle EMQ \Rightarrow EQDM$ là tứ giác nội tiếp

Vì $\triangle TBQ \sim \triangle TEC \Rightarrow TE.TQ = TB.TC$

Tương tự $TQ.TE = TD.TM \Rightarrow TD.TM = TB.TC$

f) Chứng minh H là trực tâm của tam giác ATM

Gọi K là giao điểm còn lại của TA với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Vì tam giác $TKB \sim \triangle TCA \Rightarrow TB.TC = TK.TA$

Kết hợp với $TB.TC = TE.TQ$ (câu b) $\Rightarrow TE.TQ = TK.TA$

Suy ra $\triangle TKQ \sim \triangle TEA \Rightarrow AKQE$ là tứ giác nội tiếp

Mà $AQHE$ cũng là tứ giác nội tiếp. Do đó $AKHE$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AKH = 90^\circ$

Kẻ đường kính AN trong đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó $\angle AKN = 90^\circ$

Suy ra K, H, N thẳng hàng. Hơn nữa. $BHCN$ là hình bình hành nên H, N, M thẳng hàng

Tóm lại, $MK \perp AT$. Do đó, H là trực tâm trong tam giác ATM