

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA
KIÊN GIANG NĂM HỌC 2024-2025

HƯỚNG DẪN CHẤM THI
Đề thi chính thức

Môn: **TOÁN**
 Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)
 Ngày thi: **28/8/2024**
 Hướng dẫn chấm thi gồm 06 trang

I. Hướng dẫn chung

1. Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.
2. Nếu học sinh có sử dụng các định lý, hệ quả, các kết quả phụ trợ ... phổ biến trong các chuyên đề bồi dưỡng HSG và nêu được tên thì giám khảo vẫn chấm đúng.
3. Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu 1: (5 điểm) Cho $P(x)$ là đa thức monic (đa thức có hệ số của bậc cao nhất bằng 1) bậc 5, có đúng 5 nghiệm thực phân biệt $r_1, r_2, \dots, r_5$ và đa thức $Q(x) = x^2 + 4x + 2025$. Biết rằng tồn tại duy nhất số thực a để $P(Q(a)) = 0$.

- a) Giả sử $r = \text{Max}\{r_1, r_2, \dots, r_5\}$. Chứng minh rằng: $r = 2021$
- b) Chứng minh rằng $P(2025) > 1024$

Câu	ý	Nội dung	Biểu điểm
1	a	+ Vì $r_1, r_2, \dots, r_5$ là nghiệm của $P(x)$ và $P(x)$ monic nên $P(x) = \prod_{i=1}^5 (x - r_i)$	0.5đ
		Khi đó: $P(Q(a)) = \prod_{i=1}^5 (Q(a) - r_i) = \prod_{i=1}^5 (a^2 + 4a + 2025 - r_i)$	0.5đ
		+ Ta có: $\Delta'_i = 4 - (2025 - r_i) = r_i - 2021$ với $i = 1, 2, \dots, 5$.	0.5đ
		Vì $r = \text{Max}\{r_1, r_2, \dots, r_5\}$, không mất tính tổng quát giả sử $r = r_5$. Khi đó $\Delta'_5 = r_5 - 2021 > \Delta'_i$ với $i = 1, 2, 3, 4$	0.5đ
		+ Tuy nhiên theo bài ra: tồn tại duy nhất số thực a để $P(Q(a)) = 0$ nên $\Delta'_5 = 0$ hay $r_5 = 2021$. Vậy $r = 2021$	0.5đ
		+ Ta có: $P(2025) = \prod_{i=1}^5 (2025 - r_i)$	0.5đ
		+ Theo câu a) nếu $r_5 = \text{Max}\{r_1, r_2, \dots, r_5\}$ thì $\Delta'_5 = r_5 - 2021 > \Delta'_i$	0.5đ

		và $\Delta'_5 = 0$. Do đó $\Delta'_i = r_i - 2021 < 0$ với mọi $i = 1, 2, 3, 4$ Suy ra: $2025 - r_i > 4$ với mọi $i = 1, 2, 3, 4$	0.5đ
	b	+ Từ $P(2025) = \prod_{i=1}^5 (2025 - r_i) = (2025 - r_5) \prod_{i=1}^4 (2025 - r_i)$ $= 4 \cdot \prod_{i=1}^4 (2025 - r_i) > 4 \cdot 4^4 = 1024$	0.5đ 0.5đ

Câu 2: (5 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ 2025^{u_{n+1}} + u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} + \frac{u_n}{u_n + 1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- a) Chứng minh dãy (u_n) xác định duy nhất
b) Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó

Câu	ý	Nội dung	Biểu điểm
2	a	Bằng quy nạp ta chứng minh được (u_n) là dãy số không âm với $\forall n \geq 1$.	0.5đ
		Xét hàm số: $f(x) = 2025^x + x$ với $x \geq 0$, dễ thấy $f'(x) > 0, \forall x \geq 0$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên $[0, +\infty)$.	0.5đ
		Từ $2025^{u_2} + u_2 = \frac{11}{4}$, suy ra u_2 xác định duy nhất và $u_2 \in (0, 1)$	0.5đ
		Từ $2025^{u_2} + u_2 = \frac{11}{4}$, suy ra u_2 xác định duy nhất và $u_2 \in (0, 1)$ Với $u_2 \in (0, 1)$ ta có $2025^{u_3} + u_3 = \alpha > 1$ Suy ra u_3 xác định duy nhất và $u_3 \in (0, 1)$. Tiếp tục quá trình trên ta thu được (u_n) xác định duy nhất	0.5đ
	b	Xét hàm $f(x) = 2025^x + x$ với $x \geq 0$ và $g(x) = \sqrt{1+x} + \frac{x}{x+1} \text{ với } x \geq 0$ Dễ thấy $f(x), g(x)$ đồng biến trên $[0, +\infty)$	1đ

	Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp dãy giảm, tức là $u_n > u_{n+1}$ với $\forall n \geq 1$ + Với $n=1$: $u_1 > u_2$ (luôn đúng) + Giả sử khẳng định đúng đến k, tức là $u_k > u_{k+1}$ ta sẽ chứng minh $u_{k+1} > u_{k+2}$ Thật vậy: Từ tính đồng biến của $f(x), g(x)$ đồng biến trên $[0, +\infty)$ ta có $f(u_{k+1}) = g(u_k) > g(u_{k+1}) = f(u_{k+2}) \Rightarrow f(u_{k+1}) > f(u_{k+2})$ Suy ra: $u_{k+1} > u_{k+2}$ hay $u_n > u_{n+1}$ với $\forall n \geq 1$. Do đó (u_n) là dãy giảm Mặt khác: $u_n \geq 0, \forall n \geq 1$ nên theo định lý Weierstrass dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.	1đ
	Đặt $\lim u_n = L, L \geq 0$ từ dãy đã cho ta có phương trình: $2025^L + L = \sqrt{1+L} + \frac{L}{L+1}$ Xét hàm: $f(L) = 2025^L + L - \sqrt{1+L} - \frac{L}{L+1}$ với $L \geq 0$ ta có $f'(L) = 2025^L \ln 2025 + 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+L}} - \frac{1}{(L+1)^2} > 0, \forall L \geq 0$ Do đó $f(L)$ là hàm đồng biến trên $[0, +\infty)$ Mặt khác: $f(0) = 0$. Suy ra: $L = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình Vậy $\lim u_n = 0$	1đ

Câu 3: (5 điểm) Cho tam giác ABC có O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D . Kẻ AH vuông góc BC tại H . Gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC , gọi J là trung điểm cung BC không chứa A của đường tròn (O) . Gọi X đối xứng với J qua O . Từ I_a kẻ $I_a N$ vuông góc BC tại N . Đường tròn (JDN) cắt AJ tại K (khác J).

- Gọi Q đối xứng với I qua BC . Chứng minh H, Q, I_a thẳng hàng và $HK \perp AJ$.
- Tia JH cắt (O) tại R và tia JN cắt (O) tại F . Cho AJ cắt XR, BC lần lượt tại E, L . Chứng minh hai đường tròn (JLN) và (JEF) tiếp xúc với nhau.

Câu	ý	Nội dung	Biểu điểm
3			
		Lời giải sau ứng với thể hình như hình vẽ, các thể hình khác chứng minh tương tự. Gọi L là giao điểm của AJ và BC. Khi đó $(AL, II_a) = -1$, suy ra $H(AL, II_a) = -1$.	0.5đ
a		Mặt khác $AH \parallel IQ$ và D là trung điểm IQ nên $H(AL, IQ) = -1$. Do đó H, Q, I_a thẳng hàng.	0.5đ
		Ta có tính chất quen thuộc M là trung điểm DN và $JM \perp DN$ nên KJ là phân giác góc $\angle DKN$.	0.5đ
		Ta thấy $(AL, II_a) = -1$ nên qua phép chiếu vuông góc lên BC ta được $(HL, DN) = -1$. Suy ra KH là phân giác ngoài góc $\angle DKN$, do đó $HK \perp AJ$.	0.5đ
		Xét phép nghịch đảo f tâm J phương tích JI^2 biến: $R \leftrightarrow H, X \leftrightarrow M$.	0.5đ
b		Do đó $f: XR \leftrightarrow (JMH)$. Mà K thuộc (JMH) nên $f: E \leftrightarrow K$. Suy ra $JK \cdot JE = JI^2$ hay $JK \cdot JE = JN \cdot JF$, do đó $EKNF$ nội tiếp.	0.5đ

	Mặt khác, vì KJ là phân giác góc $\angle DKN$ nên $\angle DNJ = \angle JKN = \angle JFE$. Do đó $LN \parallel EF$.	0.5đ
	Vì EL cắt FN tại J và $LN \parallel EF$ nên hai đường tròn (JLN) và (JEF) tiếp xúc với nhau	0.5đ

Câu 4: (5 điểm) Cho n điểm $P_1, P_2, \dots, P_n$ được xếp theo thứ tự đó trên một đường thẳng. Ta tô màu mỗi điểm bởi 1 trong năm màu: trắng, đen, đỏ, xanh và tím. Một cách tô màu được coi là hợp lệ nếu hai điểm liên tiếp P_i, P_{i+1} được tô màu giống nhau hoặc ít nhất một trong hai điểm được tô màu trắng.

- Tìm số cách tô màu trong trường hợp $n=1$ và $n=2$.
- Đặt s_n là số cách tô màu hợp lệ. Giả sử n là số chẵn. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{s_n} \geq \tau(s_n)$
Trong đó $\tau(s_n)$ là số ước nguyên dương của s_n .

Câu	ý	Nội dung	Biểu điểm
4	a	Với $n=1$ dễ thấy có 5 cách tô màu.	0.5đ
		Với $n=2$ ta xét các khả năng:	
		+) P_1, P_2 được tô cùng nhau thì có 5 cách.	0.5đ
		+) P_1, P_2 tô khác màu hay một trong hai điểm được tô màu trắng và điểm còn lại tô tùy ý. Xét P_1 tô màu trắng thì P_2 có tất cả 4 cách tô.	0.5đ
		Tương tự P_2 được tô trắng cũng có 4 cách.	0.5đ
		Như vậy $n=2$ có 13 cách.	
	b	Ta tìm công thức tổng quát của s_n . Gọi a_n là số cách tô màu thỏa bài toán mà điểm P_n được tô màu trắng, b_n là số cách mà P_n không được tô màu trắng. Khi đó rõ ràng ta được $s_n = a_n + b_n$.	0.5đ
		Ta thấy rằng nếu P_n là màu trắng thì P_{n-1} có thể tô màu tùy ý nên có s_{n-1} cách hay $a_n = s_{n-1}$	0.5đ
		Còn nếu P_n không được tô màu trắng thì xảy ra hai khả năng:	
		+) Còn nếu P_{n-1} tô màu trắng thì có a_{n-1} cách và P_n có 4 cách nên trường hợp này có $4a_{n-1}$.	
		+) Nếu P_{n-1} không được tô màu trắng thì phải tô cùng màu với P_n và không được tô màu trắng nên có b_{n-1} cách.	0.5đ
		Vậy trường hợp này có $b_n = 4a_{n-1} + b_{n-1}$.	
		Từ đó $s_n = a_n + b_n = s_{n-1} + (a_{n-1} + b_{n-1}) + 3a_{n-1} = 2s_{n-1} + 3s_{n-2}$ Kết hợp câu a ta có công thức tổng quát của s_n là $s_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^{n+1}}{2}$	0.5đ

	Với n chẵn ta có $n+1$ lẻ, ta có $3^{n+1} + (-1)^{n+1} \equiv -1 - 1 \equiv 2 \pmod{4}$ Nên s_n là số lẻ và từ công thức tổng quát dễ thấy $(s_n, 3) = 1$. Đặt $n = 2k$ $3^{n+1} + (-1)^{n+1} \equiv 3 \cdot 9^k - 1 \equiv 3(-1)^k - 1 \pmod{5}$ Suy ra $(s_n, 5) = 1$. Cuối cùng ta chứng minh $(s_n, 7) = 1$. Giả sử $s_n : 7$ ta có $3^{2k+1} + (-1)^{n+1} \equiv 3 \cdot 9^k - 1 \equiv -4 \cdot 2^k - 1 \pmod{7}$ Suy ra $2^{k+2} + 1 : 7$ Đặt $k+2 = 3q+r, r \in \{0, 1, 2\}$ ta có $2^{k+2} + 1 \equiv 2^r \cdot 8^q + 1 \equiv 2^r + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ Xét $r \in \{0, 1, 2\}$ đều thấy không thỏa nên $(s_n, 7) = 1$.	0.5đ
	Như vậy nếu s_n có ước nguyên tố thì lớn hơn 10. Ta viết s_n dưới dạng chính tắc là $s_n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ Trong đó p_i là số nguyên tố và $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ với $\forall i = \overline{1, k}, p_i \geq 11, \forall i = \overline{1, k}$ Bằng quy nạp theo $m > 0$ ta dễ dàng chứng minh được: $11^m > (m+1)^3, \text{ từ đó } p_i^{\alpha_i} \geq 11^{\alpha_i} > (\alpha_i + 1)^3, \forall i = \overline{1, k}$ Cho i chạy từ 1 đến k và nhân lại ta được $s_n > \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1)^3 = (\tau(s_n))^3$ Như vậy ta có ngay điều phải chứng minh.	0.5đ

-----HẾT-----