

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn:

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 11 \end{cases}$$

a) Biểu diễn xz theo y .

b) Chứng minh rằng trong ba số x, y, z có ít nhất một số thuộc nửa khoảng $[-2; -1]$.

2. Cho a, b, c là các số nguyên dương, a, b nguyên tố cùng nhau và

$$T = \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

là số nguyên. Chứng minh rằng a là số chính phương.

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho dãy số (a_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 13 \\ a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n :

a) $2a_n - 1$ là số chính phương.

b) a_n viết được dưới dạng tổng bình phương của hai số tự nhiên.

Câu 3. (3,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số lẻ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(f(x) + y) = 2x + f(x - f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ cắt nhau tại A, B sao cho tam giác AO_1O_2 vuông tại A . Tia O_1O_2 cắt đường tròn (O_2) tại E, F và cắt đường tròn (O_1) tại D . Điểm M thay đổi trên đường tròn (O_1) và không thuộc đường thẳng O_1O_2 . Kẻ đường kính MP của (O_1) . Tia O_2M cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai N . Tia O_2P cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai Q . Chứng minh rằng:

a) MD là phân giác của góc EMF .

b) MP, NQ và AB đồng quy hoặc đôi một song song.

c) NQ luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. (2,0 điểm)

Có 2021 viên bi, đựng trong 100 cái hộp. Mỗi lần, cho phép lấy 2 viên bi, 2 viên bi đó thuộc vào tối đa 2 hộp và bỏ chúng vào 1 hộp khác. Chứng minh rằng sau một số bước có thể bỏ tất cả các viên bi vào cùng 1 hộp.

--- HẾT ---

Họ và tên thí sinh: _____

Số báo danh: _____

Chữ ký CBCT1: _____

Chữ ký CBCT2: _____

I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.

2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu 1. (5,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
1.1 Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 11 \end{cases}$ a) Biểu diễn xz theo y. b) Chứng minh rằng, trong ba số x, y, z có ít nhất một số thuộc nửa khoảng $[-2; -1)$.	3,0
a) Từ giả thiết ta có: $x + z = -1 - y, \quad x^3 + z^3 = (x + z)^3 - 3xz(x + z) = 11 - y^3.$	0,25
Thay $x + z = -1 - y$ vào đẳng thức thứ hai. Ta được: $(-1 - y)^3 - 3xz(-1 - y) = 11 - y^3.$	0,25
Suy ra $xz = \frac{y^2 + y + 4}{y + 1}.$	0,5
b) Ta giả sử $x \leq y \leq z$. Ta chứng minh $y \in [-2; -1)$. Ta có $(y - x)(y - z) \leq 0.$	0,5
$\Rightarrow y^2 - y(x + z) + xz \leq 0 (*)$	0,5
Thay $xz = \frac{y^2 + y + 4}{y + 1}, x + z = -1 - y,$ vào (*) ta được:	0,5

$y^2 - y(-1 - y) + \frac{y^2 + y + 4}{y + 1} \leq 0,$	
Suy ra: $\frac{(y + 2)(2y^2 + 2)}{y + 1} \leq 0,$ hay $y \in [-2; -1)$ (đpcm).	0,5
1.2 Cho a, b, c là các số nguyên dương, a, b nguyên tố cùng nhau sao cho $T = \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ là số nguyên. Chứng minh rằng a là số chính phương.	2,0
Giả sử $(a; c) = d$, ta có $a = dm, c = dn$, trong đó $(m, n) = 1$.	0,25
Từ giả thiết ta có $ab + c^2 : a$ nên $c^2 : a$ hay $d^2 n^2 : dm$. Suy ra $dn^2 : m$.	0,25
Do $(m, n) = 1$ nên $d : m$ hay $d = m \cdot q$.	0,25
Khi đó $a = m^2 \cdot q, c = mnq$.	0,25
Ta chứng minh $q = 1$. Ta có: $ab : c$ nên $dmb : dn$.	0,25
Suy ra $b : n$ hay $b = nk$.	0,25
Ta có: $ab + c^2 : ac$ nên $m^2 qnk + m^2 n^2 q^2 : m^3 q^2 n$ hay $k + nq : mq$.	0,25
Suy ra $k : q$. Mặt khác $(a; b) = 1$ nên $(k; q) = 1$. Suy ra $q = 1$. (đpcm)	0,25

Câu 2. (4,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Cho dãy số (a_n) xác định như sau: $\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 13 \\ a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$	4,0
a. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n , $2a_n - 1$ là số chính phương.	3,0
Xét phương trình đặc trưng: $X^2 - 14X + 1 = 0$ Ta được hai nghiệm là: $X = 7 + 4\sqrt{3}; X = 7 - 4\sqrt{3}$	0,5
Khi đó CTTQ của (a_n) dạng: $a_n = A \cdot (7 + 4\sqrt{3})^n + B \cdot (7 - 4\sqrt{3})^n$ Dựa vào a_0, a_1 ta được:	0,5

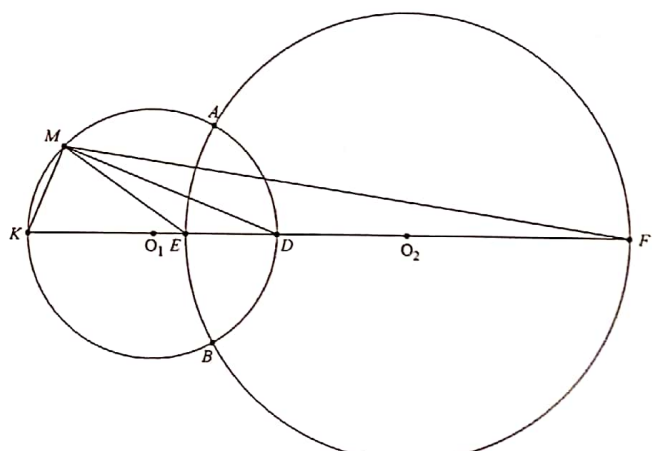
$a_n = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \cdot (7 + 4\sqrt{3})^n + \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \cdot (7 - 4\sqrt{3})^n$		
Khi đó $a_n = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{8} \cdot (2 + \sqrt{3})^{2n} + \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8} \cdot (2 - \sqrt{3})^{2n} = \frac{1}{2} (u_n^2 + v_n^2),$ với $u_n = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \cdot (2 + \sqrt{3})^n, \quad v_n = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \cdot (2 - \sqrt{3})^n.$		1,0
Ta thấy $u_n \cdot v_n = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N},$ nên $2a_n - 1 = (u_n - v_n)^2.$		0,5
Xét dãy $b_n = u_n - v_n$. Ta thấy $b_0 = 1, b_1 = 5,$ và $b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n, \forall n \in \mathbb{N}.$ Từ đó suy ra $b_n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$. Vậy $2a_n - 1 = b_n^2$ là số chính phương.		0,5
b. Với mỗi số tự nhiên n , a_n viết được dưới dạng tổng bình phương của hai số tự nhiên.		1,0
Theo câu a ta có $2a_n - 1 = b_n^2$. Suy ra b_n lẻ với mọi $n \in \mathbb{N}$.		0,5
Đặt $b_n = 2c_n + 1$ ($c_n \in \mathbb{N}$), $\forall n \in \mathbb{N}$. Ta có: $a_n = 2c_n^2 + 2c_n + 1 = c_n^2 + (c_n + 1)^2$		0,5

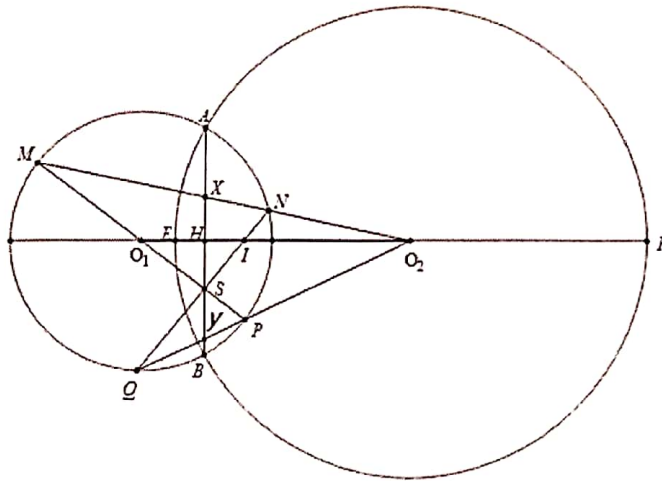
Câu 3. (3,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Tìm tất cả các hàm số lẻ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(f(x) + y) = 2x + f(x - f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}. (1)$	3,0
Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn bài toán. Vì f là hàm lẻ nên $f(-x) = -f(x)$.	0,5
Thay $(x; y) \rightarrow (f(y); y)$ vào (1) ta được: $f(f(f(y)) + y) = 2f(y) + f(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}. (2)$	1,0

hay	$f(f(f(x)) + x) = 2f(x) + f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}. (3)$	
Thay $(x; y) \rightarrow (x; -f(x))$ vào (1) ta được:	$f(0) = 2x + f(x + f(f(x))), \quad \forall x \in \mathbb{R}. (4)$	0,5
Từ (3) và (4) ta được:	$f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$	0,5
Thử lại, hàm số $f(x) = -x$ thỏa mãn. Vậy hàm số cần tìm là	$f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$	0,5

Câu 4. (6,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ cắt nhau tại A, B sao cho tam giác AO_1O_2 vuông tại A . Tia O_1O_2 cắt đường tròn (O_2) tại E, F và cắt đường tròn (O_1) tại D . Điểm M thay đổi trên đường tròn (O_1) và không thuộc đường thẳng O_1O_2 . Kẻ đường kính MP của (O_1) . Tia O_2M cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai N . Tia O_2P cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai Q .	6,0
a. Chứng minh <u>MD</u> là phân giác của góc <u>EMF</u>	2,0
	
Từ giả thiết ΔAO_1O_2 vuông tại A ta có O_1A là tiếp tuyến của (O_2) và O_2A là tiếp tuyến của (O_1) .	0,5
Gọi K là giao điểm còn lại của đường thẳng O_1O_2 với đường tròn (O_1) . Ta có:	0,5
$\overline{O_2D} \cdot \overline{O_2K} = O_2A^2 = O_2E^2.$	
Theo hệ thức Newton ta có $(EFDK) = -1$ hay $(ME, MF, MD, MK) = -1.$	0,5
Mặt khác, DK là đường kính của (O_1) nên $MD \perp MK$. Suy ra MD là phân giác của góc EMF .	0,5
b. Chứng minh MP, NQ và AB đồng quy hoặc đôi một song song	2,0



Gọi X, Y là giao điểm của AB với MN và PQ .	0,5
nên $(M; N; X; O_2) = -1$	0,5
và $(P; Q; Y; O_2) = -1$	0,5
Theo tính chất của chùm điều hòa ta được MP, NQ, XY đồng quy hoặc đôi một song song.	0,5
c. NQ luôn đi qua một điểm cố định.	2,0
TH1: MP, NQ, AB đồng quy tại S . Gọi $H = AB \cap O_1O_2$. Xét phép chiếu xuyên tâm S lên O_1O_2 ta suy ra $(O_1; I; H; O_2) = (M; N; X; O_2) = -1.$	0,5
Vì O_1, H, O_2 cố định suy ra I cố định. Vậy NQ đi qua I cố định.	0,5
TH2: MP, NQ, AB đôi một song song: Lập luận tương tự, thay phép chiếu xuyên tâm bởi phép chiếu song song theo phương AB lên O_1O_2 .	1,0

Câu 5. (2,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Có 2021 viên bi, đựng trong 100 cái hộp. Mỗi lần, cho phép lấy 2 viên bi, 2 viên bi đó thuộc vào tối đa 2 hộp và bỏ chúng vào 1 hộp khác. Chứng minh rằng sau một số bước có thể bỏ tất cả các viên bi vào cùng một hộp.	2,0
Thay 2021 bằng m và 100 bằng n . Ta chứng minh bài toán đúng với mọi $m, n \geq 4$.	0,5

Với $m = n = 4$: Số bi thuộc một trong các dạng sau: $(1; 1; 1; 1), (1; 2; 1; 0), (2; 2; 0; 0), (1; 3; 0; 0)$ Thực hiện như sau: $(1; 1; 1; 1) \rightarrow (3; 1; 0; 0) \rightarrow (2; 0; 2; 0) \rightarrow (1; 0; 1; 2) \rightarrow (0; 0; 0; 4).$	
Với m, n tùy ý: Ta chứng minh bằng quy nạp theo m. Giả sử với k viên bi ta chuyển được hết tất cả các viên bi vào cùng một hộp. Xét $k + 1$ viên bi. Ta đưa về trường hợp $(1; k; 0; 0; \dots; 0)$	0,5
Sau đó thực hiện như sau: $\begin{aligned} (1; k; 0; 0; \dots; 0) &\rightarrow (0; k - 1; 2; 0; \dots; 0) \rightarrow (0; k - 2; 1; 2; \dots; 0) \\ &\rightarrow (2; k - 3; 0; 2; \dots; 0) \rightarrow (1; k - 1; 0; 1; \dots; 0) \\ &\rightarrow (0; k + 1; 0; 0; \dots; 0) \end{aligned}$ Như vậy với $k + 1$ viên bi ta cũng chuyển được về một hộp. Vậy với mọi m, n ta luôn chuyển được hết số bi vào một hộp.	1,0

- HẾT -