

Câu 1. (5,0 điểm)

1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} + \frac{6}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{9-x} \right) : \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt{x}+3} \left(\begin{matrix} x \geq 0; x \neq 1 \\ x \neq 9 \end{matrix} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq 4$

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 + 2m - 1)x - m^2 + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3$

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Cho đa thức $P(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 8x + 1$ và số $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$. Tính $P(a)$

2) Giải phương trình $x^2 + 3x - 1 + 2\sqrt{(x^3 + x + 5)^2} = 5\sqrt{x^3 + x + 5}$

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Tìm ba số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^4 + 9y^2 + 25z^2 = x^2 + 6xy + 2022$

2) Cho chín số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_9$ đều không có ước số nguyên tố nào khác 3; 5 và 7. Chứng minh rằng trong chín số đã cho luôn tồn tại hai số mà tích của hai số này là một số chính phương

Câu 4. (6,0 điểm) Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M là một điểm thuộc nửa đường tròn đã cho, H là hình chiếu của M trên AB . Đường thẳng qua O và song song với MA cắt tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn (O) tại điểm K

1) Chứng minh bốn điểm O, B, K, M cùng thuộc một đường tròn

2) Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng MA, MB . Chứng minh ba đường thẳng CD, MH, AK đồng quy

3) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AH, BH . Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $CDFE$ đạt giá trị lớn nhất

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (5,0 điểm)

3) Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} + \frac{6}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{9-x} \right) : \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt{x}+3} \begin{pmatrix} x \geq 0; x \neq 1 \\ x \neq 9 \end{pmatrix}$

c) Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} + \frac{6}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{9-x} \right) : \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt{x}+3} \begin{pmatrix} x \geq 0; x \neq 1 \\ x \neq 9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+3)^2 + 6(\sqrt{x}-3) + 36}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{x+12\sqrt{x}+27}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

d) Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq 4$

$$A \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-1} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3\sqrt{x}+13}{\sqrt{x}-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -3\sqrt{x}+13 \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq \frac{169}{9} \\ \begin{cases} -3\sqrt{x}+13 \leq 0 \\ \sqrt{x}-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset \end{cases}$$

Vậy $1 < x \leq \frac{169}{9}; x \neq 9$ thì thỏa đề

4) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 + 2m - 1)x - m^2 + m = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt } x_1, x_2, x_3 \text{ thỏa}$$

$$\text{mãn } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-m)[x^2 - (m+1)x + m-1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - (m+1)x + m-1 = 0(*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi pt (*) có 2 nghiệm phân biệt khác

$$m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 2m + 5 > 0 \\ m^2 - (m+1)m + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \text{ nên phương trình đã cho luôn có 3 nghiệm}$$

phân biệt với mọi m. từ giả thiết ta có :

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + m^2 - 3mx_1x_2 = 0(**)$$

Theo hệ thức Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1x_2 = m-1 \end{cases}$. Thay vào (**) được :

$$(m+1)^2 - 2(m-1) + m^2 - 3m(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Câu 2. (4,0 điểm)

3) Cho đa thức $P(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 8x + 1$ và số $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$. Tính $P(a)$

$$a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow (a+1)^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 1 = 0$$

Chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $x^2 + 2x - 1 = 0$ ta được :

$$P(x) = (x^2 + 2x - 1)(x^3 - x + 2) + 3x + 3$$

$$\Rightarrow P(a) = (a^2 + 2a - 1)(a^3 - a + 2) + 3a + 3 = 3a + 3$$

$$\Rightarrow P(a) = 3\sqrt{2}$$

4) Giải phương trình $x^2 + 3x - 1 + 2\sqrt[3]{(x^3 + x + 5)^2} = 5\sqrt[3]{x^3 + x + 5}$

Phương trình đã cho tương đương với :

$$(x+1)^3 - 2(x+1)^2 + 5(x+1) = (x^3 + x + 5) - 2(\sqrt[3]{x^3 + x + 5})^2 + 5\sqrt[3]{x^3 + x + 5}$$

Đặt $a = x+1, b = \sqrt[3]{x^3 + x + 5}$ ta được phương trình :

$$a^3 - 2a^2 + 5a = b^3 - 2b^2 + 5b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 - 2a - 2b + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \Rightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^3 + x + 5} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3} \\ a^2 + ab + b^2 - 2a - 2b + 5 = 0(VN) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}$

Câu 3. (4,0 điểm)

3) Tìm ba số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^4 + 9y^2 + 25z^2 = x^2 + 6xy + 2022$

Phương trình đã cho tương đương với $(x^2 - 1)^2 + (x - 3y)^2 + (5z)^2 = 2023$

Với x, y, z là các số nguyên ta có: $(x^2 - 1)^2, (x - 3y)^2, (5z)^2$ là các số chính phương (bình phương của số nguyên)

Mỗi số nguyên khi chia cho 8 được số dư là một trong các số $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; 4$

$\Rightarrow$ mỗi số chính phương khi chia cho 8 sẽ được số dư là một trong các số $0; 1; 4$

Từ đó $(x^2 - 1)^2 + (x - 3y)^2 + (5z)^2$ là tổng của 3 số chính phương nên nó chia cho 8 sẽ được số dư là một trong các số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$

Mặt khác 2023 chia cho 8 dư 7

Do vậy, không thể tìm được ba số nguyên x, y, z thỏa mãn yêu cầu của đề bài

4) Cho chín số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_9$ đều không có ước số nguyên tố nào khác 3; 5 và 7. Chứng minh rằng trong chín số đã cho luôn tồn tại hai số mà tích của hai số này là một số chính phương

Giả sử $a_1 = 3^{m_1} \cdot 5^{n_1} \cdot 7^{p_1}, \dots, a_9 = 3^{m_9} \cdot 5^{n_9} \cdot 7^{p_9}$, trong đó m_i, n_i, p_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 9$) là các số tự nhiên

Với mỗi $i = 1; 2; 3; \dots; 9$ bộ ba số (m_i, n_i, p_i) có tính chẵn (c), lẻ (l) theo thứ tự là một trong 8 trường hợp sau đây :

$(c; c; c), (c; c; l), (c; l; c), (c; l; l), (l; c; c), (l; c; l), (l; l; c), (l; l; l)$

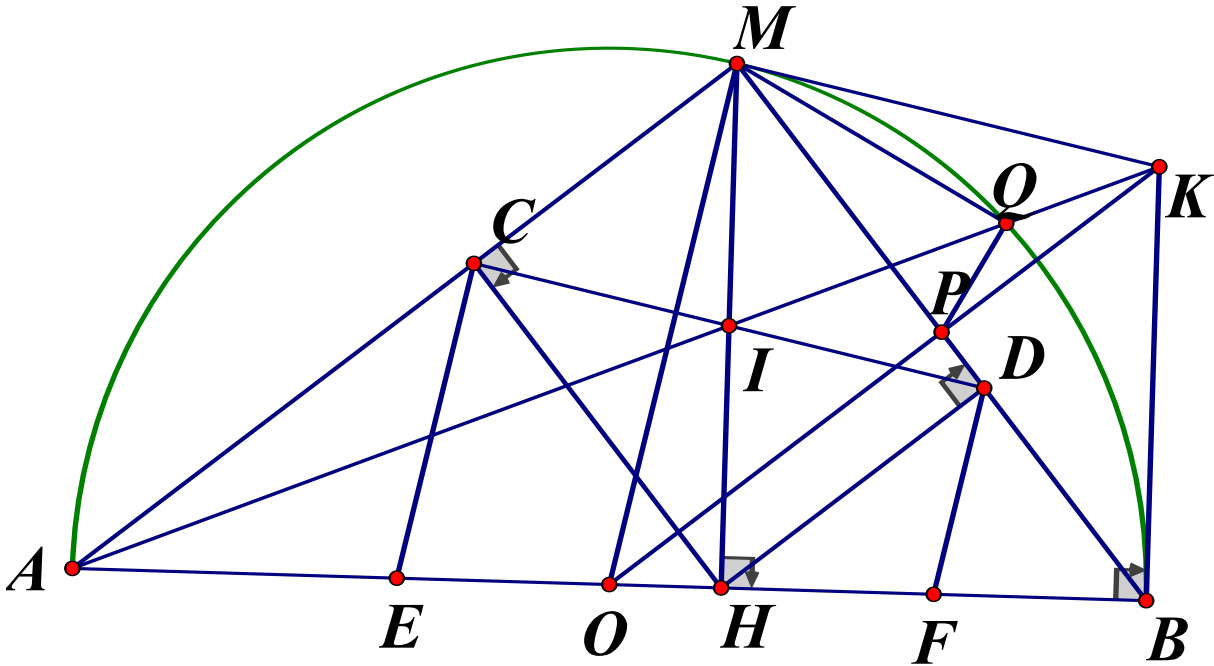
Theo nguyên lý Dirichlet, trong 9 bộ ba số (m_i, n_i, p_i) tồn tại ít nhất hai bộ ba số là (m_i, n_i, p_i) và (m_k, n_k, p_k) với $j, k \in \{1; 2; \dots; 9\}$ và $j \neq k$, cùng ở một trong 8 trường hợp trên $\rightarrow m_j + m_k, n_j + n_k, p_j + p_k$ là các số chẵn

$\Rightarrow m_j + m_k = 2m; n_j + n_k = 2n; p_j + p_k = 2p$ ($m, n, p \in \mathbb{N}$)

Từ đó $a_j \cdot a_k = 3^{m_j + m_k} \cdot 5^{n_j + n_k} \cdot 7^{p_j + p_k} = 3^{2m} \cdot 5^{2n} \cdot 7^{2p} = (3^m \cdot 5^n \cdot 7^p)^2$

$\Rightarrow a_j \cdot a_k$ là số chính phương nên ta có điều phải chứng minh

Câu 4. (6,0 điểm) Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M là một điểm thuộc nửa đường tròn đã cho, H là hình chiếu của M trên AB . Đường thẳng qua O và song song với MA cắt tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn (O) tại điểm K



4) Chứng minh bốn điểm O, B, K, M cùng thuộc một đường tròn

Ta có $\angle KOB = \angle MAB$ (hai góc đồng vị)

Mà $\angle MAB = \frac{1}{2} \angle MOB$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung MB)

$$\Rightarrow \angle KOB = \frac{1}{2} \angle MOB \Rightarrow \angle KOB = \angle KOM \Rightarrow \Delta KOB = \Delta KOM (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \angle KMO = \angle KBO = 90^\circ \Rightarrow \angle KMO + \angle KBO = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác $OBKM$ nội tiếp

Vậy 4 điểm O, B, K, M cùng thuộc một đường tròn

5) Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng MA, MB .

Chứng minh ba đường thẳng CD, MH, AK đồng quy

Gọi P là giao điểm của OK và MB . Từ $\angle KMO = \angle KBO = 90^\circ$

$\Rightarrow KM, KB$ là các tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow P$ là trung điểm của MB

Gọi I, Q lần lượt là giao điểm của AK với MH và nửa đường tròn (O)

Ta có $\angle BPK = \angle BQK = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BPQK$ nội tiếp

$\Rightarrow \angle MBK = \angle IQP$, mà $\angle MBK = \angle IMP$ (so le trong)

$\Rightarrow \angle IQP = \angle IMP \Rightarrow MIPQ$ là tứ giác nội tiếp

Từ đó $\angle MPI = \angle MQI$ mà $\angle MQI = \angle MBA$ (hai góc nội tiếp cùng chắn 1 cung)

$\Rightarrow \angle MPI = \angle MBA \Rightarrow IP \parallel AB$

Mặt khác, P là trung điểm của $MB \Rightarrow I$ là trung điểm của MH, mà $MCHD$ là hình chữ nhật nên I cũng là trung điểm CD

Vậy CD, MH, AK đồng quy tại I

6) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AH, BH . Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $CDFE$ đạt giá trị lớn nhất

$$\text{Chỉ ra } S_{CDFE} = 2S_{IEF} = IH \cdot EF = \frac{1}{2} MH \cdot \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} MH \cdot R$$

Từ đó, $S_{CDFE} \max \Leftrightarrow MH \max \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa của cung AB

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3$$

$$3abc(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= (ca \cdot ab + ab \cdot bc + bc \cdot ca)(a^2 + b^2 + c^2) \leq \frac{(ab + bc + ca)^2}{3} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$$

Dựa vào BĐT phụ $xy + yz + zx \leq \frac{(x + y + z)^2}{3}$, dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$

$$\frac{(ab + bc + ca)^2}{3} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{3} (ab + bc + ca)(ab + bc + ca) \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\leq \frac{1}{3} \left[\frac{(ab + bc + ca) + (ab + bc + ca) + (a^2 + b^2 + c^2)}{3} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{(a + b + c)^2}{3} \right]^3 = 9$$

Dựa vào BĐT Cô si $x, y, z \geq 0 \Rightarrow xyz \leq \left(\frac{x + y + z}{3} \right)^3 \Leftrightarrow x = y = z$

Vậy $abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$