



**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2024-2025**

Môn thi: Toán (chung) - Đề 1

Dành cho học sinh thi vào các lớp chuyên tự nhiên

Thời gian làm bài: 120 phút.

(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P = \sqrt{x+2024} + \frac{2025}{x^2 - 2x + 1}$.

2) Cho đường thẳng $y = 2x + 3$ cắt parabol $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt. Tính tổng tung độ của hai điểm đó.

3) Tính diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{3}$.

4) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$, $AC = 8$. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AC . Tính thể tích của hình được tạo thành.

Câu 2. (1,5 điểm) Xét biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 4}{x + 5\sqrt{x} + 4} - \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0$.

1) Rút gọn biểu thức A .

2) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Câu 3. (2,5 điểm)

1) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ (với m là tham số).

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $(x_2^2 - 2mx_2 + 2m)(2x_1 - 5) = 2024$.

2) Giải phương trình $x^2 + 5x - 4 - 2(x+1)\sqrt{3x-1} = 0$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) với đường kính BC . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D , gọi DA là tiếp tuyến của đường tròn (O) với A là tiếp điểm. Kẻ đường thẳng qua A vuông góc với BC tại M và cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Gọi AH là đường cao của tam giác ABE , AH cắt BC tại F . Gọi I là trung điểm của đoạn AH , đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), AK cắt BD tại N .

1) Chứng minh các điểm E, M, F, H cùng thuộc một đường tròn và $DB \cdot DC = DM \cdot DO$.

2) Chứng minh $AFEC$ là hình thoi và $BAH = ADB$.

3) Chứng minh $MK \perp AN$ và $MD = 2MN$.

Câu 5. (1,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{4x^2 + (y+2)(x-y)} + 2\sqrt{xy} = 4y \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{5y-1} = 3x^2 - 7x + 6. \end{cases}$$

2) Xét ba số dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{a}{a^3 + 3} + \frac{b}{b^3 + 3} + \frac{c}{c^3 + 3}$.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:..... Họ tên, chữ ký CBCT 1

Số báo danh: Họ tên, chữ ký CBCT 2

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH****ĐỀ CHÍNH THỨC.****HƯỚNG DẪN CHẤM THI
ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN****Năm học: 2024 - 2025****Môn thi: Toán (chung) - Đề 1****Dành cho học sinh thi vào các lớp chuyên tự nhiên
(Hướng dẫn chấm gồm: 06 trang)**

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P = \sqrt{x+2024} + \frac{2025}{x^2-2x+1}$. 2) Cho đường thẳng $y = 2x + 3$ cắt parabol $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt. Tính tổng tung độ của hai điểm đó. 3) Tính diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đều có độ dài cạnh bằng $\sqrt{3}$. 4) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$, $AC = 8$. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AC . Tính thể tích của hình được tạo thành.	(2,0đ)
1)	Điều kiện xác định $\begin{cases} x+2024 \geq 0 \\ x^2-2x+1 \neq 0 \end{cases}$	0,25
	$\begin{cases} x \geq -2024 \\ (x-1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2024 \\ x \neq 1 \end{cases}$.	0,25
2)	Pt hoành độ giao điểm: $x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$	0,25
	Với $x = -1 \Rightarrow y = 1$ Với $x = 3 \Rightarrow y = 9$ Vậy tổng tung độ giao điểm là: $1 + 9 = 10$.	0,25
3)	Tính đúng bán kính của đường tròn là $R = 1$.	0,25
	Diện tích của hình tròn bằng $\pi R^2 = \pi$.	0,25
4)	Hình được tạo thành là hình nón có bán kính đáy là $r = AB = 6$, độ dài đường cao $h = AC = 8$.	0,25
	Thể tích của hình nón là $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 96\pi$.	0,25
Câu 2	Xét biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{x+5\sqrt{x}+4} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$. 1) Rút gọn biểu thức A . 2) Tìm giá trị lớn nhất của A .	1,5



1)	$\frac{\sqrt{x}+4}{x+5\sqrt{x}+4} = \frac{\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+4)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$	0,25
	$A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} = \frac{x-\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x\sqrt{x}+1} + \frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}$ $= \frac{x-\sqrt{x}+1-x-\sqrt{x}+3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}$	0,25
	$= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$	0,25
	$= \frac{1}{x-\sqrt{x}+1}.$	0,25
2)	$A = \frac{1}{x-\sqrt{x}+1}. \text{ Ta có } x-\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \text{ với mọi } x \geq 0.$	0,25
	Do đó $0 < A \leq \frac{4}{3}$ với mọi $x \geq 0$.	
	Ta có $A = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$. Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{4}{3}$ khi $x = \frac{1}{4}$.	0,25
Câu 3	1) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ (với m là tham số). a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu. b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho $(x_2^2 - 2mx_2 + 2m)(2x_1 - 5) = 2024$. 2) Giải phương trình $x^2 + 5x - 4 - 2(x+1)\sqrt{3x-1} = 0$.	2,5
1.a)	Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $2m-5 < 0$	0,25
	$\Leftrightarrow m < \frac{5}{2}.$	0,25
1.b)	Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - 2m + 5 = m^2 - 4m + 6 = (m-2)^2 + 2 > 0$ với mọi m $\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m	0,25
	$x = x_2$ là nghiệm của phương trình đã cho nên ta có $x_2^2 - 2(m-1)x_2 + 2m - 5 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 - 2mx_2 + 2m = 5 - 2x_2$	0,25
	Khi đó $(x_2^2 - 2mx_2 + 2m)(2x_1 - 5) = 2024 \Leftrightarrow (5 - 2x_2)(2x_1 - 5) = 2024$ $\Leftrightarrow 10(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 2049.$	0,25
	Thay $x_1 + x_2 = 2(m-1), x_1x_2 = 2m-5$ vào điều kiện trên ta được	0,25



	$20(m-1) - 4(2m-5) = 2049 \Leftrightarrow m = \frac{683}{4}.$	
	Cách 1: Đk: $x \geq \frac{1}{3}.$ Đặt $\begin{cases} a = x+1 \\ b = \sqrt{3x-1} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + 5x.$ Pt đã cho trở thành: $a^2 + b^2 - 2ab = 4$	0,25
	$\Leftrightarrow (a-b)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ a-b=-2 \end{cases}$	0,25
	Với $a-b=2$, ta có: $x+1-\sqrt{3x-1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{3x-1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x-1=(x-1)^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-5x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ (thỏa mãn đk)	0,25
	Với $a-b=-2$, ta có $x+1-\sqrt{3x-1}=-2 \Leftrightarrow \sqrt{3x-1}=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2+3x+10=0 \end{cases}$ (vn)	0,25
2)	Kết luận pt có nghiệm duy nhất $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$	
	Cách 2: Đk: $x \geq \frac{1}{3}.$ Pt $\Leftrightarrow x^2 + 5x - 4 - 2x\sqrt{3x-1} - 2\sqrt{3x-1} = 0$ $\Leftrightarrow [x^2 - 2x\sqrt{3x-1} + (3x-1)] + (2x - 2\sqrt{3x-1}) - 3 = 0$ $\Leftrightarrow (x - \sqrt{3x-1})^2 + 2(x - \sqrt{3x-1}) - 3 = 0$	0,25
	Đặt $t = x - \sqrt{3x-1}$, pt trở thành: $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-3 \end{cases}$	0,25
	Với $t=1$ ta có $x - \sqrt{3x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x-1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ (tm đk)	0,25
	Với $t=-3$ ta có $x - \sqrt{3x-1} = -3 \Leftrightarrow \sqrt{3x-1} = x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + 3x + 10 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm). Kết luận pt có nghiệm duy nhất $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$	0,25
Câu 4	Cho đường tròn (O) với đường kính BC . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D , gọi DA là tiếp tuyến của đường tròn (O) với A là tiếp điểm. Kẻ đường thẳng qua A vuông góc với BC tại M và cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Gọi AH là đường cao của tam	3,0 đ



	giác ABE, AH cắt BC tại F. Gọi I là trung điểm của đoạn AH, đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), AK cắt BD tại N. 1) Chứng minh các điểm E, M, F, H cùng thuộc một đường tròn và $DB.DC = DM.DO$. 2) Chứng minh $AFEC$ là hình thoi và $BAH = ADB$. 3) Chứng minh $MK \perp AN$ và $MD = 2MN$.	
1)	Ta có AE vuông góc với BC tại M nên $FME = 90^\circ$ suy ra M thuộc đường tròn đường kính EF (1).	0,25
	$EHF = 90^\circ$ suy ra H thuộc đường tròn đường kính EF (2). Từ (1), (2) suy ra 4 điểm E, M, F, H cùng thuộc một đường tròn.	0,25
	AM là đường cao của tam giác vuông ADO nên ta có $AD^2 = DM.DO$ (3)	0,25
	Xét $\triangle DAC$ và $\triangle DBA$ có $\begin{cases} DAC = DBA \\ D \text{ chung} \end{cases}$ $\Rightarrow \triangle DAC \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{DC}{DA} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow DA^2 = DB.DC$ (4) Từ (3) và (4) ta có $DB.DC = DM.DO$	0,25
2)	$OC \perp AE \Rightarrow M$ là trung điểm của AE. Ta có $EF \parallel AC$ (vì cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow MAC = MEF$ $\Rightarrow \triangle AMC = \triangle EMF$ (g.c.g) $\Rightarrow MC = MF$ nên $AFEC$ là hình thoi	0,25
	Ta có $ABH = DAM$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo $\angle AEF$)	0,25
		0,25



	Mà $\begin{cases} ABH + BAH = 90^\circ \\ DAM + ADB = 90^\circ \end{cases}$. Do đó $BAH = ADB$.	0,25
	$KAM = KBE$ (cùng chắn KE) $KBE = KIM$ (vì $IM \parallel BE$) $\Rightarrow KAM = KIM$	0,25
	$\Rightarrow$ tứ giác $AKMI$ nội tiếp $\Rightarrow MK \perp AN$ (vì $MIA = 90^\circ$)	0,25
3)	Xét $\triangle BHI$ và $\triangle AMN$, có: $BHI = AMN = 90^\circ$, $IBH = NAM$ (chắn KE) $\Rightarrow \triangle BHI \sim \triangle AMN$. Do đó $\frac{HB}{MA} = \frac{HI}{MN}$ (5)	0,25
	Xét $\triangle BHA$ và $\triangle AMD$, có: $BHA = AMD = 90^\circ$, $ABH = DAM$ $\Rightarrow \triangle BHA \sim \triangle AMD$. Do đó $\frac{HB}{MA} = \frac{HA}{MD}$ (6) Từ (5) và (6) ta được $\frac{HI}{MN} = \frac{HA}{MD}$, mà $HA = 2HI$ nên $MD = 2MN$.	0,25
Câu 5	1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x^2 + (y+2)(x-y)} + 2\sqrt{xy} = 4y \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{5y-1} = 3x^2 - 7x + 6. \end{cases}$ 2) Xét ba số dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{a}{a^3+3} + \frac{b}{b^3+3} + \frac{c}{c^3+3}$.	1,0
1	ĐK: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \frac{1}{5} \\ 4x^2 + (y+2)(x-y) \geq 0 \end{cases}$ (*) pt (1) $\Leftrightarrow \left[\sqrt{4x^2 + (y+2)(x-y)} - 2y \right] + (2\sqrt{xy} - 2y) = 0$ $\Leftrightarrow (x-y) \left[\frac{4(x+y) + (y+2)}{\sqrt{4x^2 + (y+2)(x-y)} + 2y} + \frac{2y}{\sqrt{xy} + y} \right] = 0 \Leftrightarrow x = y$	0,25
	Cách 1: Khi $x = y$ thì pt (2) trở thành $\sqrt{x-1} + \sqrt{5x-1} = 3x^2 - 7x + 6$ (3) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} - (x-1) + \sqrt{5x-1} - (x+1) = 3x^2 - 9x + 6$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(1 - \sqrt{x-1}) + \sqrt{5x-1} - (x+1) = 3x^2 - 9x + 6$	



	$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \cdot \frac{2-x}{1+\sqrt{x-1}} + \frac{(5x-1)-(x+1)^2}{\sqrt{5x-1}+x+1} = 3x^2 - 9x + 6$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \cdot \frac{2-x}{1+\sqrt{x-1}} + \frac{(2-x)(x-1)}{\sqrt{5x-1}+x+1} = -3(2-x)(x-1)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=0 \\ \sqrt{x-1}=0 \\ \frac{1}{1+\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{5x-1}+x+1} + 3\sqrt{x-1} = 0 \text{ (vn)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} (tm).$ $x=2 \Rightarrow y=2.$ $x=1 \Rightarrow y=1.$ Vậy nghiệm của hệ là $(1;1), (2;2).$ Cách 2: Khi $x=y$ thì pt (2) trở thành $\sqrt{x-1} + \sqrt{5x-1} = 3x^2 - 7x + 6$ (3) Ta thấy $x=1$ là một nghiệm của pt (3) và $(x;y) = (1;1)$ là một nghiệm của hệ pt đã cho. Với $x > 1$, pt (3) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} - (x-1) + \sqrt{5x-1} - (x+1) = 3x^2 - 9x + 6$ $\Leftrightarrow \frac{-x^2+3x-2}{\sqrt{x-1}+x-1} + \frac{-x^2+3x-2}{\sqrt{5x-1}+x+1} = 3(x^2-3x+2)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ 3 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+x-1} + \frac{1}{\sqrt{5x-1}+x+1} = 0 \text{ (vn)} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x=2 \text{ (vì } x > 1).$ Vậy nghiệm của hệ là $(1;1), (2;2).$	0,25
	$S = \frac{a}{a^3+1+1+1} + \frac{b}{b^3+1+1+1} + \frac{c}{c^3+1+1+1} \leq \frac{a}{3a+1} + \frac{b}{3b+1} + \frac{c}{3c+1}.$ Ta đi chứng minh $\frac{a}{3a+1} + \frac{b}{3b+1} + \frac{c}{3c+1} \leq \frac{3}{4}.$	0,25
2	Đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ với $x, y, z > 0$. Ta cần chứng minh $\frac{x}{3x+y} + \frac{y}{3y+z} + \frac{z}{3z+x} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{3x}{3x+y} + \frac{3y}{3y+z} + \frac{3z}{3z+x} \leq \frac{9}{4}$ $\Leftrightarrow 1 - \frac{3x}{3x+y} + 1 - \frac{3y}{3y+z} + 1 - \frac{3z}{3z+x} \geq 3 - \frac{9}{4}$ $\Leftrightarrow \frac{y}{3x+y} + \frac{z}{3y+z} + \frac{x}{3z+x} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{y^2}{3xy+y^2} + \frac{z^2}{3yz+z^2} + \frac{x^2}{3zx+x^2} \geq \frac{3}{4}$	0,25



$$VT \geq \frac{(x+y+z)^2}{3xy+3yz+3zx+x^2+y^2+z^2} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy $S \leq \frac{3}{4}$ và với $a=b=c=1$ thì $S = \frac{3}{4}$. Vậy GTLN của S là $\frac{3}{4}$.

Lưu ý: Các cách giải khác đáp án nếu đúng, phù hợp với chương trình THCS, ban giám khảo thống nhất cho điểm thành phần tương ứng.

_____HẾT_____