

ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Ngày thi: 27/9/2022

(Đáp án gồm 06 trang)

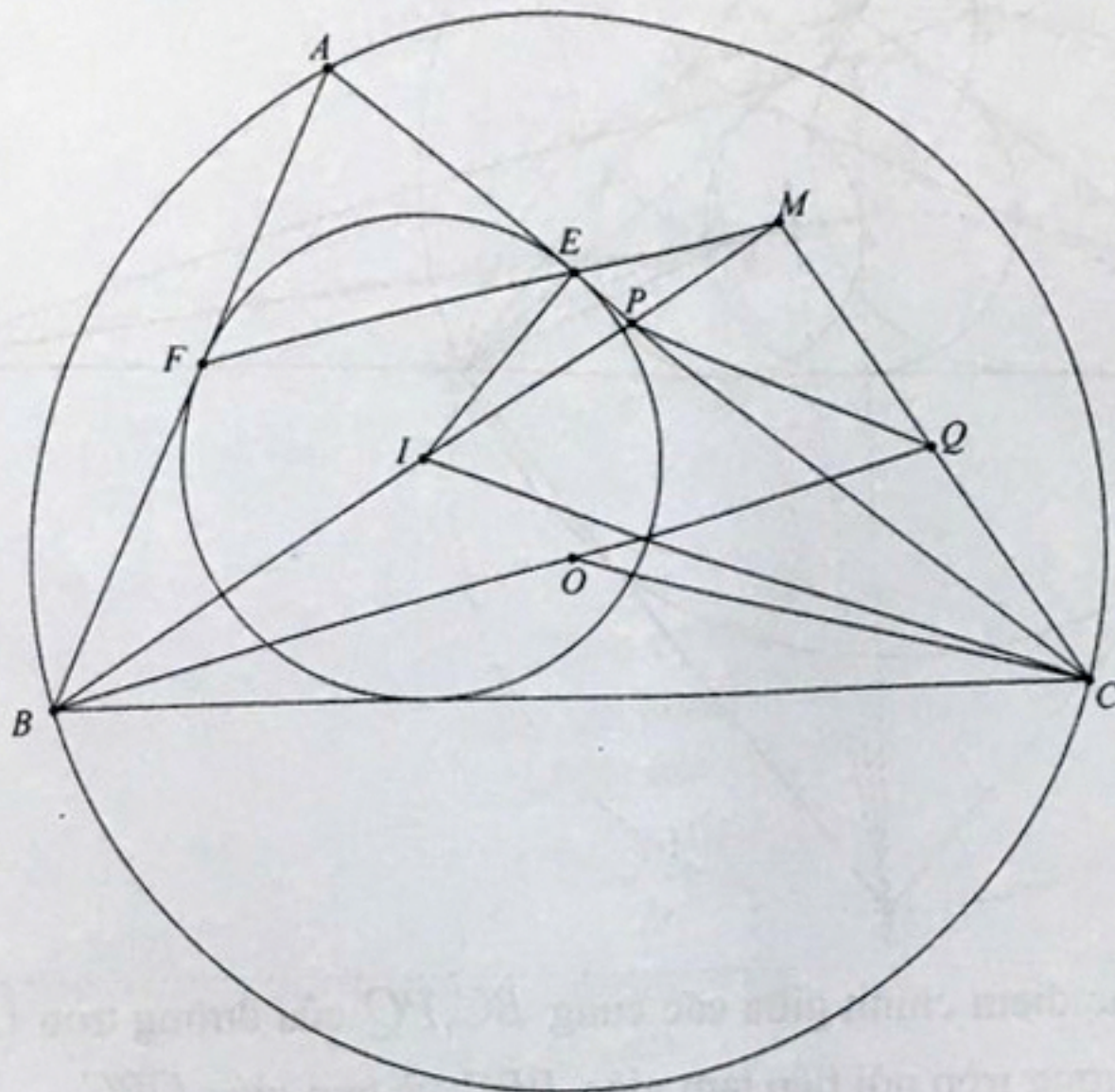
Bài	Nội dung	Điểm
1 (5 điểm)	Cho dãy số (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} + (n+1)x_n x_{n+1} = nx_n^2, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số (y_n) xác định bởi $y_n = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_{n+1}}{x_n}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.	
	Từ giả thiết ta có $x_{n+1} = \frac{nx_n^2}{1+(n+1)x_n}, \forall n \geq 1$. Dễ thấy $x_n > 0, \forall n \geq 1$. Ta có: $\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{kx_k}{1+(k+1)x_k} = \frac{kx_k + k(k+1)x_k^2 - k(k+1)x_k^2}{1+(k+1)x_k}$ $= \frac{kx_k(1+(k+1)x_k) - (k+1)kx_k^2}{1+(k+1)x_k} = kx_k - (k+1)x_{k+1}, \forall k \geq 1.$ Do vậy $y_n = \frac{1}{2} - (n+1)x_{n+1}, \forall n \geq 0$.	1,5
	Ta sẽ chứng minh $x_n \leq \frac{1}{n(n+1)}, \forall n \geq 1$ (1). Ta chứng minh quy nạp theo n. Với $n=1$ thì $x_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1(1+1)}$ nên (1) đúng. Giả sử (1) đúng với $n=k \geq 1$, tức là $x_k \leq \frac{1}{k(k+1)}$. Do hàm số $f(x) = \frac{nx^2}{1+(n+1)x}$ đồng biến trên $(0, +\infty)$ nên ta có $x_{k+1} = \frac{kx_k^2}{1+(k+1)x_k} \leq \frac{k \left(\frac{1}{k(k+1)} \right)^2}{1+(k+1) \cdot \frac{1}{k(k+1)}} = \frac{1}{(k+1)^3} < \frac{1}{(k+1)(k+2)}, \forall k \geq 1$ Do đó theo quy nạp thì $x_n \leq \frac{1}{n(n+1)}, \forall n \geq 1$	2,0
	Như vậy: $\frac{1}{2} > y_n = \frac{1}{2} - (n+1)x_{n+1} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}, \forall n \geq 1$ Nên tồn tại $\lim y_n$ hữu hạn và $\lim y_n = \frac{1}{2}$	1,5

2 (5 điểm)	Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + y.f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$ Giả sử có hàm f thỏa mãn: $f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + y.f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. (1)$ Đặt $P(u; v)$ chỉ phép thế $(x; y)$ bởi $(u; v)$ vào (1); đặt S là tập điểm bất động của f. Ta có $P(x; 1) \Rightarrow f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1), \forall x$ $\Rightarrow x + f(x + 1) \in S, \forall x \in \mathbb{R}. (2)$ (2) cũng chứng tỏ tập S là tập khác rỗng.	1,0
	Trường hợp 1: Nếu $f(0) \neq 0$. +) Với $P(0; y) \Rightarrow f(f(y)) + f(0) = f(y) + y.f(0), \forall y \in \mathbb{R}$. Trong đẳng thức này ta chọn $y \in S$ thì $f(f(y)) = f(y)$ nên thu được $f(y) + f(0) = f(y) + y.f(0), \forall y \in S$ $\Leftrightarrow f(0).(y - 1) = 0, \forall y \in S \Leftrightarrow y = 1, \forall y \in S \text{ (do } f(0) \neq 0 \text{)}.$ Điều trên chứng tỏ S chỉ có phần tử duy nhất là 1. Kết hợp với (2) dẫn đến $x + f(x + 1) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = 2 - x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.	1,5
	Trường hợp 2: Nếu $f(0) = 0$. +) Với $P(x; 0) \Rightarrow f(x + f(x)) = x + f(x), \forall x \Leftrightarrow x + f(x) \in S, \forall x \in \mathbb{R}$. +) Với $P(-1; 1) \Rightarrow f(-1 + f(0)) = -1 + f(0) \Leftrightarrow f(-1) = -1 \Leftrightarrow -1 \in S$. +) Với $P(1; -1) \Rightarrow f(1 + f(0)) + f(-1) = 1 + f(0) - 1.f(1) \Leftrightarrow f(1) = 1 \Leftrightarrow 1 \in S$. +) Với $P(1; x) \Rightarrow f(1 + f(1 + x)) + f(x) = 1 + x + f(1 + x), \forall x \in \mathbb{R} (3).$ Đẳng thức này suy ra tính chất là: Nếu $x \in S$ và $x + 1 \in S$ thì $x + 2 \in S$.	1,0
	+) Với $P(x + 1; 0) \Rightarrow f(x + 1 + f(x + 1)) = x + 1 + f(x + 1), \forall x$ $\Leftrightarrow x + 1 + f(x + 1) \in S$ Kết hợp điều này với (2) và nhận xét ở trên suy ra $x + 2 + f(x + 1) \in S, \forall x \in \mathbb{R}.$ Do đó $f(x + 2 + f(x + 1)) = x + 2 + f(x + 1), \forall x \in \mathbb{R}$. $\Leftrightarrow f(x + f(x - 1)) = x + f(x - 1), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ (đổi biến } x + 2 \text{ thành biến } x).$ +) Với $P(x; -1) \Rightarrow f(x + f(x - 1)) + f(-x) = x + f(x - 1) - f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. $\Leftrightarrow x + f(x - 1) + f(-x) = x + f(x - 1) - f(x), \forall x \Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ Vậy f lẻ. +) Với $P(-1; -x) \Rightarrow f(-1 + f(-1 - x)) + f(x) = -1 + f(-1 - x) - x.f(-1), \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow -f(1 + f(1 + x)) + f(x) = -1 - f(x + 1) + x, \forall x \in \mathbb{R}. (4).$ Cộng theo vế (3) và (4) có $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu. Vậy, bài toán có 2 nghiệm hàm $f(x) = 2 - x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$	1,5

3
Điểm)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) . Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh AC, AB tại E, F . Đường thẳng BI cắt đường thẳng EF tại M và cắt đường thẳng AC tại P , đường thẳng BO cắt đường thẳng CM tại Q .

a) Chứng minh $MP \cdot MB = MQ \cdot MC$.



Ta có $\widehat{MIC} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}$

$$\widehat{MEC} = \widehat{AEF} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

Suy ra $\widehat{MIC} = \widehat{MEC}$, suy ra tứ giác $MEIC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{IMC} = \widehat{IEC} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{MCB} = 90^\circ - \widehat{MBC} = 90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2}$, từ đây ta có

$$\begin{aligned} \widehat{BQC} &= 180^\circ - \widehat{QBC} - \widehat{QCB} \\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2} - \left(90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2}\right) = \widehat{BAC} + \frac{\widehat{ABC}}{2}. \end{aligned}$$

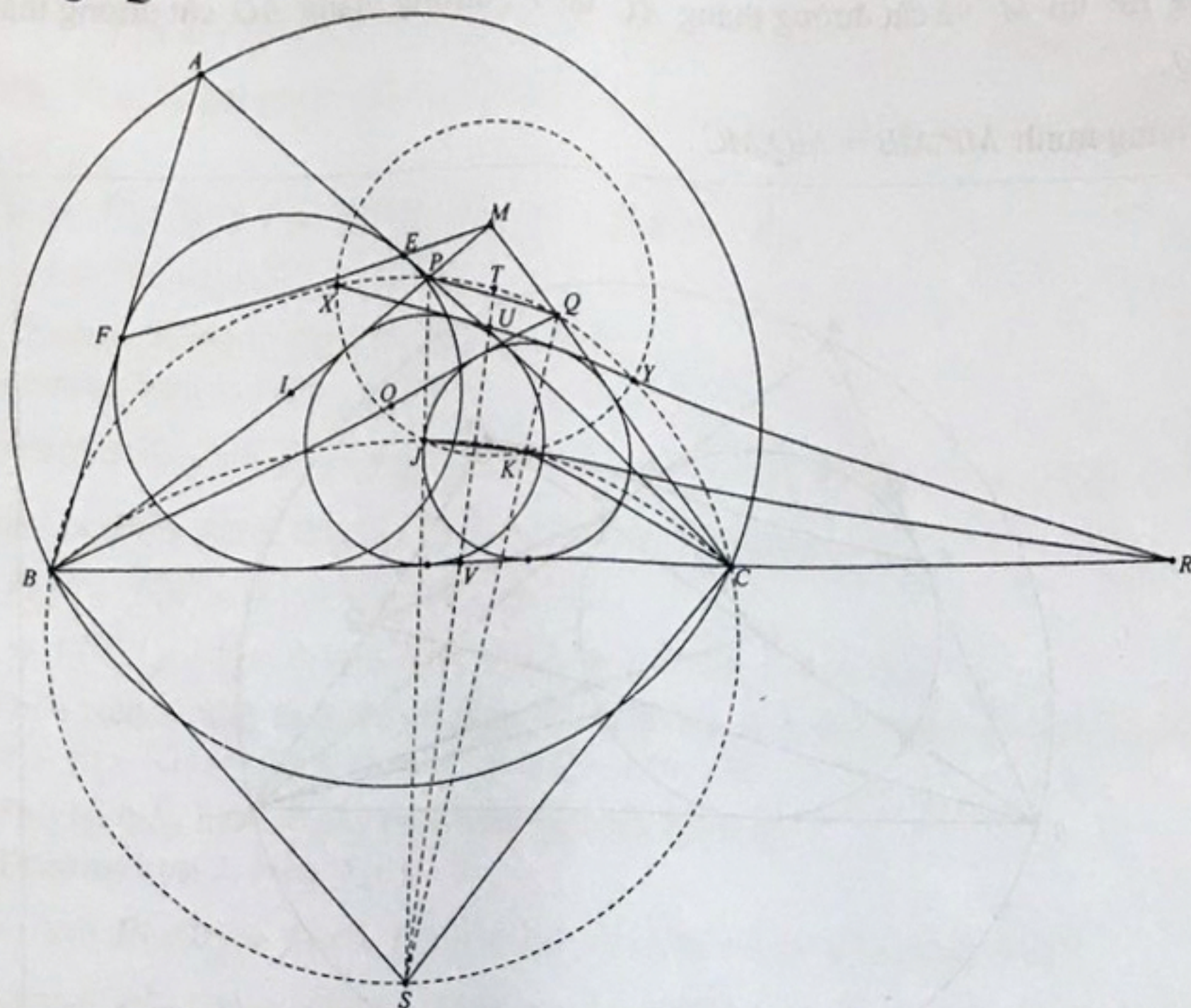
Tam giác ABP có $\widehat{BPC} = \widehat{BAC} + \frac{\widehat{ABC}}{2}$ (góc ngoài tam giác)

Suy ra $\widehat{BPC} = \widehat{BQC}$ nên tứ giác $BCQP$ nội tiếp, do đó ta có $MP \cdot MB = MQ \cdot MC$.

1,0

1,0

b) Dựng tiếp tuyến chung d khác BC của các đường tròn nội tiếp tam giác PBC và tam giác QBC . Chứng minh đường thẳng d song song với đường thẳng PQ .



Gọi S, T là các điểm chính giữa các cung BC, PQ của đường tròn $(BCQP)$, J, K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PBC và tam giác QBC .

+ Ta thấy P, J, S thẳng hàng và Q, K, S thẳng hàng.

Ta có: $SJ = SK, SB = SC$ và $\widehat{SCK} = \widehat{SCB} + \widehat{BCK} = \widehat{SQB} + \widehat{KCQ} = \widehat{KQC} + \widehat{KCQ} = \widehat{CKS}$

$\Rightarrow SK = SC \Rightarrow B, C, J, K$ cùng thuộc đường tròn tâm S .

+ Do ST là phân giác của $\widehat{PSQ}$ nên cũng là phân giác của $\widehat{JSK}$ nên ST là trung trực của đoạn JK , suy ra $TJ = TK$.

+ Gọi X, Y là giao điểm của đường tròn (T, TK) và $(BCQP)$, do $TP = TQ$ và $TX = TY$ nên $PQ \parallel XY$.

Xét 3 đường tròn $(BCQP), (BCJK)$ và (T, TK) ta có các đường thẳng XY, JK, BC đồng quy tại R .

Gọi U, V là giao điểm của XY, BC với TS .

Ta có $\widehat{RUV} = \widehat{TUX} = \frac{1}{2}(\widehat{sdTX} + \widehat{sdYS}) = \frac{1}{2}(\widehat{sdTY} + \widehat{sdYS}) = \frac{1}{2}\widehat{sdTS}$

$\widehat{RVU} = \widehat{RVT} = \frac{1}{2}(\widehat{sdTC} + \widehat{sdBS}) = \frac{1}{2}(\widehat{sdTC} + \widehat{sdCS}) = \frac{1}{2}\widehat{sdTS}$

Suy ra $\widehat{RUV} = \widehat{RVU}$, suy ra RU và RV đối xứng nhau qua JK .

Mà RV là tiếp tuyến chung của (J) và (K) nên RU cũng là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn này.

1,5

1,5

4 (5 điểm)	a) Cho một nhóm 15 học sinh có chiều cao khác nhau gồm 5 học sinh nữ có chiều cao tăng dần ký hiệu lần lượt là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 và 10 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 15 học sinh đó theo một hàng ngang sao cho tính từ trái sang phải thì các học sinh nữ có chiều cao tăng dần, các học sinh nam cũng có chiều cao tăng dần; giữa học sinh G_1 và G_2 có ít nhất 3 học sinh nam, giữa học sinh G_4 và G_5 có ít nhất 1 học sinh nam và nhiều nhất 3 học sinh nam.
Gọi x_1 là số học sinh nam được xếp bên trái G_1; x_2 là số học sinh nam ở giữa G_1 và G_2; x_3 là số học sinh nam ở giữa G_2 và G_3; x_4 là số học sinh nam ở giữa G_3 và G_4; x_5 là số học sinh nam ở giữa G_4 và G_5; x_6 là số học sinh nam được xếp bên phải G_5. Khi đó bộ số $(x_1; x_2; \dots; x_6)$ hoàn toàn xác định các vị trí của các học sinh nữ và ta có: $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 10$; $x_2 \geq 3$; $1 \leq x_5 \leq 3$.	1,0
Đặt $y_2 = x_2 - 3$; $y_5 = x_5 - 1$, ta được $x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 6$. Trong đó các ẩn không âm và $y_5 \leq 2$. Áp dụng bài toán chia kẹo Euler ở dạng $x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 6 - y_5, \text{ với } y_5 \text{ lần lượt là } 0, 1, 2.$ Ta được số cách xếp là $C_{10}^4 + C_9^4 + C_8^4 = 406$.	1,0
b) Cho H là một lục giác đều có cạnh bằng 2022. Tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho có một cách phân hoạch H thành n hình tam giác có cạnh không lớn hơn 2022 và tổng n tỉ số giữa độ dài cạnh ngắn nhất với độ dài cạnh dài nhất của mỗi tam giác đó không vượt quá $\frac{9n^2 + 10n - 20}{2n^2 + 1}$?	1,0
Giả sử tồn tại số nguyên dương n để tồn tại một cách phân hoạch hình H thành n tam giác thỏa mãn bài toán. Kí hiệu n tam giác là $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ có độ dài các cạnh là thỏa mãn $c_i \leq b_i \leq a_i \leq 2022$ với $\forall i = \overline{1; n}$. Kí hiệu: $V_i = \frac{c_i}{a_i}$ với $\forall i = \overline{1; n}$. Trước hết ta có: Diện tích của hình lục giác đều H bằng 6 lần diện tích của một tam giác đều có cạnh bằng 2022 nên $S_H = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2022^2$. Lúc này: $V_i = \frac{\frac{c_i}{a_i} \cdot \frac{a_i^2 \sqrt{3}}{4}}{\frac{a_i^2 \sqrt{3}}{4}} \geq \frac{c_i}{2022} \cdot \frac{a_i}{2022}$ (do $\frac{a_i}{2022} \leq 1$) $= \frac{2 \cdot \frac{1}{2} a_i \cdot c_i}{2022^2} \geq \frac{2 \cdot S_{\Delta_i}}{2022^2} \text{ với } \forall i = \overline{1; n}$ Dấu bằng không thể xảy ra vì ngược lại tam giác Δ_i có hai cạnh góc vuông có độ dài là a_i, c_i và cạnh huyền là b_i. Mâu thuẫn với giả sử $c_i \leq b_i \leq a_i \leq 2022$.	

	Vậy $V_i > \frac{2.S_{\Delta_i}}{2022^2}$ với $\forall i = \overline{1; n}$	
	Do đó $\sum_{i=1}^n V_i > \frac{2 \cdot \frac{6\sqrt{3} \cdot 2022^2}{4}}{2022^2} = 3\sqrt{3} > 5.$ Mặt khác theo giả thiết: $\sum_{i=1}^n V_i \leq \frac{9n^2 + 10n - 20}{2n^2 + 1} = \frac{5(2n^2 + 1) + 10n - n^2 - 25}{2n^2 + 1} = 5 - \frac{(n-5)^2}{2n^2 + 1} \leq 5.$ Vậy có điều mâu thuẫn nên điều giả sử ban đầu là sai. Vậy không tồn tại n.	1,0

Chú ý: Hướng dẫn chấm này chỉ thực hiện cho lời giải như trên, nếu thí sinh làm bài theo cách khác thì tổ chấm thống nhất phương án chấm thi cho phù hợp và vẫn cho điểm tối đa nếu cách giải đúng.